Раздел II

МОНОГРАФИЯ В ВЫПУСКЕ

А. И. ЩЕТНИКОВ

ДИАЛОГИ ПЛАТОНА КАК ИСТОЧНИК СВЕДЕНИЙ ПО РАННЕЙ ГРЕЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКЕ

Сведения о первых трех веках греческой математики от Фалеса и Пифагора до Евклида скудны, отрывочны и не всегда надежны. Первым античным математическим сочинением, целиком сохранившимся до нашего времени, являются «Начала» Евклида (ок. 300 г. до н. э.). Некоторые важные сведения о ранней греческой математике (в том числе небольшие отрывки из трактатов Гиппократа Хиосского и Архита Тарентского, написанных веком раньше «Начал») дошли до нас в позднеантичных комментариях к сочинениям Евклида, Архимеда, Аристотеля.

Важнейшим источником сведений о развитии античной математики в период от последней трети V до середины IV в. до н. э. служат сочинения Платона и Аристотеля. Хотя оба великих античных философа и не занимались математикой профессионально, они живо интересовались состоянием современных им математических наук. Их сочинения содержат многочисленные отрывки, прямо или косвенно освещающие содержание математических исследований, размышления о природе математических объектов, математические выкладки и (особенно у Платона) околоматематические спекуляции.

Комментированные своды математических фрагментов Платона уже издавались историками математики различных стран[1]. Однако на русском языке такого издания до сих пор не предпринималось. Простой перевод уже имеющихся комментариев на русский язык представляется сегодня нецелесообразным, поскольку за несколько десятилетий, прошедших со времени их составления, историками античной математики были получены новые важные результаты, среди которых следует отметить реконструкцию так называемого Феодорова ме-

[1] *Brumbaugh R. S.* Plato's mathematical imagination: The mathematical passages in the Dialogues and their interpretation. Bloomington, 1954 (repr. 1977); *Frajese A.* Platone e la matematica nel mondo antico. Rome, 1963.

ста диалога Платона «Теэтет» (147d–148b)[2], а также ряд попыток реконструировать пифагорейское учение о «рациональных диагоналях», упоминаемое Платоном в «Государстве» (546c)[3].

Более того, в последние тридцать-сорок лет в мировой науке происходило переосмысление содержания ранней античной математики, приведшее к новой расстановке акцентов в историко-математических исследованиях. Историки математики предыдущей эпохи зачастую интерпретировали античную математику в терминах математической науки своего времени, тем самым вольно или невольно модернизируя ее содержание, цели и методы. Напротив, ведущая тенденция современных исследований состоит в том, чтобы попытаться понять античную математику в ее собственных средствах и образе мышления[4].

Уже в древности считалось общепризнанным, что понимание сочинений Платона требует от читателя специальных математических познаний. Теон Смирнский (II в. н. э.) написал для неискушенных в математических тонкостях читателей специальное «Изложение математических вещей, необходимых при чтении Платона». Составление комментария к своду математических фрагментов диалогов Платона, которым могли бы пользоваться работающие с этими текстами гуманитарии, представляется сегодня не менее актуальным, чем во времена Теона Смирнского. Детальный анализ этих фрагментов по отдельности и в совокупности, сопоставление их с сочинениями Евклида и других античных математиков позволит дать более полную картину греческой математики в классическую эпоху и одновременно будет способствовать более ясному и глубокому пониманию философского учения Платона.

Нам следовало выбрать один из двух вариантов распределения отдельных отрывков — по диалогам либо по темам. Поскольку интерес для нас представляли прежде всего собственно *математические* детали свидетельств, предпочтение было отдано второму варианту. При этом некоторые целостные фрагменты (такие, как длинный пассаж из

---

[2] *Itard J.* Les livres arithmetiqúes d'Euclide. Paris, 1961. См. также: *Knorr W. R.* The evolution of the Euclidean Elements. A study of the theory of incommensurable magnitudes and its significance for Greek geometry. Dordrecht a. o., 1975; *Щетников А. И.* Как древние греки доказывали иррациональность Sqrt(N): 1 // Империя математики. 2001. № 3.

[3] *Fowler D. H.* Book II of Euclid's Elements and a pre-Eudoxan theory of ratio // Archive for History of Exact Sciences. 1980. № 22. P. 5–36; 1982. № 26. P. 193–209; *Паев М. Е.* Решение двух античных проблем. Киев, 1987; *Knorr W. R.* Rational diameters and the discovery of incommensurability // American Mathematical Monthly. 1998. № 105. P. 421–429; *Щетников А. И.* Атомы Платона, алгоритм Теона и понятие «семенного логоса» // Математическое образование. 1999. № 1(8). С. 84–94.

[4] См.: *Unguru S.* On the need to rewrite the history of Greek mathematics // Archive for History of Exact Sciences. 1975. № 15. P. 67–114.

«Государства» (521d–531c)) пришлось разбить на части и отнести эти части к разным темам.

Сами темы освещают отдельные разделы античных математических наук («арифметика как учение о четных и нечетных числах», «учение о соизмеримости и несоизмеримости», «теоретическая гармония», «теоретическая астрономия»), философские размышления Платона по поводу различных сторон математического знания («математические определения», «математические объекты сами по себе», «диалектика математических понятий», «роль математики в образовании»). В отдельный раздел выделены свидетельства Платона о современных ему математиках и их предшественниках.

Внутри каждой темы фрагменты распределены также по близости их математического содержания, чтобы последовательное ознакомление с этими фрагментами и комментарием к ним давало по возможности целостную картину.

При составлении свода математических фрагментов диалогов Платона в этот свод было решено включить отрывки из диалогов, приписывание которых Платону считается сомнительным, и из сочинений платоновской школы, поскольку математическое содержание этих отрывков очень тесно примыкает к содержанию подлинных диалогов Платона.

Важная задача, связанная с работой над данным комментарием, состояла в уточнении существующих русских переводов диалогов Платона. За основу комментируемого материала были взяты переводы, вошедшие в 4-томное собрание сочинений Платона (М., 1990–1994). Все эти переводы были заново сверены с оригинальным греческим текстом. При сверке особое внимание уделено унификации математической терминологии: во всем корпусе фрагментов одно и то же греческое слово переводилось одним и тем же русским словом, а разные греческие синонимы — разными русскими синонимами. Также были выправлены связанные с математикой неточности, препятствующие адекватному пониманию текста. Хочется выразить надежду, что предпринятая нами работа не останется незамеченной издателями и приведет к исправлению этих неточностей в последующих изданиях Платона.

1. Personalia

1.1. Государство, 600ab

(*Сократ.*) А рассказывают ли о многочисленных выдумках и изобретениях [Гомера] в искусствах или каких-либо других родах деятельности, свидетельствующих о нем как о искушенном в делах муже, подобно тому как люди передают о Фалесе Милетском[1] и о скифе Анахарсисе?

(*Главкон.*) Нет, не рассказывают.

(*Сократ.*) Но если не в государственных делах, то, быть может, говорят, что сам Гомер при жизни руководил чьим-либо образованием (παιδείας) и эти люди ценили общение с ним и передали потомкам некий гомеровский путь жизни, подобно тому как за это особенно ценили Пифагора[2], а его последователи даже и до сих нор называют свой образ жизни пифагорейским и явно выделяются среди остальных людей?

---

[1] Фалес Милетский (624–548 гг. до н. э.) — первый греческий философ и геометр. Основные сведения о его геометрических занятиях содержатся в «Комментарии к “Началам” Евклида», составленном неоплатоником Проклом (410–485 н. э.). Сам Прокл почерпнул эти сведения из не дошедшей до нас «Истории геометрии» перипатетика Евдема Родосского (конец IV в. до н. э.).

Прокл пишет о том, что «Фалес, съездив в Египет, впервые перенес эту теорию в Элладу; он многое открыл сам, и принципы многого указал тем, кто пришел после него: одно он изучал в более общем виде, а другое — в более чувственном» (65_{7-11}). Фалесу приписывается изобретение способа измерения высоты пирамиды и расстояния до корабля в открытом море, а также объяснение затмений (см. примеч. 1 к **1.3**). Все эти изобретения и открытия основаны на теоретическом понятии о прямолинейности лучей света / зрения. Диоген Лаэрций (I, 24) сообщает, что Фалес первым «вписал в круг прямоугольный треугольник» (т. е. заметил, что всякий вписанный угол, опирающийся на диаметр, является прямым). Согласно Проклу, Фалес первым установил следующие теоремы: круг делится диаметром пополам (157_{10}); углы при основании равнобедренного треугольника равны (250_{20}); вертикальные углы при пересечении двух прямых равны (299_{1}).

[2] Пифагор Самосский (570–497 гг. до н. э.) — философ и математик, основавший в Великой Греции (южная Италия) религиозно-мистическую общину, преследовавшую в том числе и политические цели. Прокл (65_{15-21}) характеризует математическую деятельность Пифагора так: «Пифагор преобразовал эту премудрость (φιλοσοφίαν) в форму свободного образования (σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου), изучая сами ее начала и рассматривая теоремы отвлеченно от материи и умозрительно (ἀύλως καὶ νοερῶς). Он же открыл учение о пропорциях (τῶν ἀνὰ λόγων πραγματείαν)* [по другому чтению — учение о иррациональных (τῶν ἀλόγων)] и устройство космических тел**».

*) О теории пропорций см. раздел 8.

**) Об открытии «космических тел» = правильных многогранников см. раздел 10.

1.2. Теэтет, 174a

Сократ. Рассказывают, что когда Фалес[1], наблюдая небесные светила и заглядевшись наверх, упал в колодец, то какая-то фракиянка, миловидная и бойкая служанка, посмеялась над ним, что-де он стремится знать, что на небе, того же, что рядом и под ногами, не замечает[2].

[1] См. примеч. 1 к **1.1**.

[2] Традиционный анекдот об ученом как о человеке не от мира сего. В «Истории» Геродота (I, 170 и др.) Фалес изображен активным и дальновидным участником политической жизни.

1.3. Кратил, 409ab

Гермоген. А как же Луна (σελήνη)?

Сократ. Это имя, мне кажется, уязвляет Анаксагора[1].

Гермоген. Как это?

Сократ. Похоже, что он нечто давно известное выдал за новое[2], сказав, что Луна получает свет от Солнца.

Гермоген. Что ты имеешь в виду?

Сократ. Ведь «луч» (σέλας) и «свет» (φῶς) — одно и то же.

Гермоген. Да.

Сократ. Так вот этот свет у Луны как-то всегда бывает и новым (νέον), и старым (ἕνον), если правду говорят последователи Анаксагора: все время кружа вокруг Луны, [Солнце] посылает ей новый свет, а старый остается от предыдущего месяца[3].

Гермоген. Верно.

Сократ. Многие же называют ее «Луной» (σελαναία)[4].

Гермоген. Верно.

Сократ. А поскольку у Луны всегда имеется и новый, и старый луч, то правильнее всего было бы ей называться «Лучестароновая» (σελαενανεοάεια), а сокращенно, но все же врастяжку ее называют «Луна» (σελαναία).

[1] Анаксагор Клазоменский (500–428 гг. до н. э.) — продолжатель ионийской традиции физической философии. О математических изысканиях Анаксагора сохранились отрывочные сведения. Согласно Плутарху (Об изгнании, 607f), Анаксагор в последние годы жизни занимался квадратурой круга. Известно также, что Анаксагор написал сочинение по теории перспективы (см. примеч. 1 к **2.6**).

[2] Анаксагор первым обнародовал в письменном сочинении учение о фазах Луны и затмениях. Однако открытие этого учения античная традиция связывает с именем Фалеса Милетского. Поэтому Платон и говорит, что Анаксагор «нечто давно известное выдал за новое».

[3] Что такое «старый свет, оставшийся от предыдущего месяца», — не очень понятно. Может быть, речь идет о так называемом *пепельном свечении*? (Когда фаза Луны невелика, та часть лунного диска, которая не освещена Солнцем напрямую, освещается солнечным светом, отраженным от Земли.)

[4] Дорийское название Луны (σελαναία) отличается от ионийского (σελήνη).

1.4. Соперники, 132ab

(*Сократ.*) Было похоже, что [мальчики] спорили то ли об Анаксагоре[1], то ли об Энопиде[2]. Я видел, как они чертят круги и изображают обеими руками углы склонения (ἐγκλίσεις), причем проделывают все это очень серьезно. <...>

(*Поклонник.*) Они болтают о небесных явлениях и несут философский вздор.

[1] См. примеч. 1 к **1.3**.

[2] Энопид Хиосский (вторая половина V в. до н. э.) — астроном и математик. Ему приписывается учение о движении Солнца по эклиптике (41 7 DK) и ряд других астрономических открытий (см. примеч. к **12.6**). Прокл в «Комментарии к "Началам" Евклида» сообщает, что Энопид занимался задачами на построение (и, возможно, был первым, кто ввел само понятие задачи на построение) (80_{15}); в частности, он обсуждал задачи о проведении к данной прямой через данную точку вне нее перпендикуляра (283_4) и наклонной под заданным углом (333_1).

1.5. Гиппий меньший, 366c–367e

Сократ. Скажи мне, Гиппий[1], разве ты не опытен в вычислениях и логистике (λογισμῶν καὶ λογιστικῆς)[2]?

Гиппий. И даже очень опытен, Сократ.

Сократ. Значит, если кто спросит тебя, сколько будет трижды семьсот, ты, если пожелаешь, быстрее и лучше всех дашь правильный ответ?

Гиппий. Конечно. <...>

Сократ. Ну а как же относительно лжи в том же самом деле? Ответь мне, как и раньше, Гиппий, честно и откровенно: если кто спросил бы тебя, сколько будет трижды семьсот, а ты пожелал бы лгать и ни за что не отвечать правду, ты ли солгал бы лучше других и продолжал бы постоянно лгать насчет этого, или же невежда в вычислениях сумел бы солгать лучше тебя, намеренно лгущего? <...>

Сократ. Ведь ты, конечно, сведущ и в геометрии?

Гиппий. Да, разумеется.

Сократ. Ну что ж, разве не так все обстоит и в геометрии? Разве не один и тот же человек способнее всех и на ложь и на правду относительно чертежей (περὶ τῶν διαγραμάτων)[3], а именно геометр? <...>

Сократ. Давай же рассмотрим и третьего знатока — астронома: ведь в этом искусстве ты считаешь себя еще более сведущим, чем в двух предыдущих?

[1] Гиппий Элийский (конец V в. до н. э.) — знаменитый софист, известный свои-

ми разносторонними знаниями и недюжинными способностями. Прокл в «Комментарии к "Началам" Евклида» (272_7, 356_{11}) сообщает, что Гиппий открыл характеристическое свойство квадратриссы (σύμπτωμα τετραγωνιζουσῶν). Квадратриссой называется выходящая из точки A на стороне прямого угла ABC линия AED такая, что для любой ее точки E и ортогональной проекции этой точки F на сторону AB выполняется пропорция $AF : AB = \angle ABE : \angle ABC$ (рис. 1). Сам Гиппий применял эту кривую для решения задачи о делении угла в произвольном отношении. Папп в «Математическом собрании» (IV, 30–34) указывает, что впоследствии Динострат (IV в. до н. э.) использовал эту же кривую для решения задачи о квадратуре круга, в связи с чем ей и было дано такое название (см.: Прасолов, 1997).

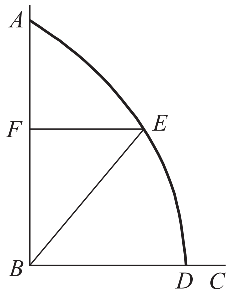


Рис. 1.

[2] С числами и вычислениями имели дело два раздела античной математики – арифметика (ἀριθμετική) и логистика (λογιστική) (см. раздел 2). Ниже «λογισμός» единообразно переводится как «вычисление», «ἀριθμός» — как «число» или «счет».

[3] Иоанн Филопон в «Комментарии на "Категории" Аристотеля» (193_5) пишет: «чертежи (διαγράμματα) и теоремы (θεωρήματα) — это одно и то же».

1.6. Гиппий больший, 285bc

Сократ. Но ради богов, Гиппий, что же именно они [лакедемоняне] рады бывают слушать и за что тебя хвалят? Очевидно, за то, что ты лучше всего знаешь, — за науку о звездах и о небесных явлениях?

Гиппий. Нисколько; такой науки они и вовсе не выносят.

Сократ. А о геометрии они рады бывают слушать?

Гиппий. Никоим образом, потому что многие из них и считать не умеют.

Сократ. Значит, они далеки от того, чтобы слушать твои речи о вычислениях.

Гиппий. Очень далеки, клянусь Зевсом.

1.7. Протагор, 318de

(*Протагор.*)[1] Софисты просто терзают юношей, так как против воли заставляют их, бегущих от упражнений в науках, заниматься этими упражнениями, уча их вычислениям, астрономии, геометрии, музыке[2] (тут Протагор взглянул на Гиппия).

---

[1] Протагор из Абдеры (ок. 490 — ок. 420 до н. э.) — первый и самый известный из греческих софистов (см. примеч. к **1.9**).

[2] Здесь перечислена вся совокупность пифагорейских наук (ср. **1.8**).

1.8. Теэтет, 143c–146c, 165a

Сократ. Если бы меня особенно заботила Кирена, Феодор[1], я бы расспросил тебя и о ней и о ее жителях, например есть ли там среди юношей кто-нибудь, кто бы ревностно предавался геометрии или какой-нибудь другой премудрости (φιλοσοφίαν). Но я люблю их меньше, чем вот этих, и более желал бы знать, какие юноши здесь у нас подают надежды. Я и сам слежу за этим, сколько могу, и спрашиваю у других, с кем, как я вижу, молодые люди охотно общаются. А ведь к тебе далеко не мало их приходит, да это и справедливо: кроме прочих достоинств их привлекает твоя геометрия. <...>

Сократ. А Феодор — живописец?

Теэтет. Нет, насколько я знаю.

Сократ. Быть может, он — геометр?

Теэтет. Именно так, Сократ.

Сократ. А также знаток астрономии, логистики, музыки и всего того, что нужно для образования?

Теэтет. Мне кажется, да. <...>

Сократ. Вот и скажи мне, ты учишься у Феодора геометрии?

Теэтет. Я — да.

Сократ. И астрономии, и гармонии, и вычислениям?

Теэтет. Стараюсь, по крайней мере. <...>

Теэтет. Итак, мне кажется, что то, чему можно научиться у Феодора, — геометрия и прочее, что ты только что перечислял, — есть знания. <...>

Феодор. Я же, пожалуй, из тех, кто отошел от отвлеченных рассуждений (ἐκ τῶν ψιλῶν λόγων)[2] и склонился к геометрии.

---

[1] Феодор Киренский (конец V в. до н. э.) — известный геометр, занимавшийся теорией иррациональностей (см. **7.4**, **8.3**). Диоген Лаэрций (II, 103) сообщает, что у Феодора брал уроки геометрии Платон.

[2] То есть от философии.

1.9. Теэтет, 169a

Сократ (обращаясь к Феодору). И не думай, что я должен надрываться, защищая твоего покойного друга [Протагора], а ты и пальцем не пошевельнешь. Давай-ка и ты, милейший, последи некоторое время за нашим рассуждением, пока мы не узнаем, тебе ли быть мерой чертежей[1], или все, подобно тебе, достаточно для себя сильны в астрономии и в прочих областях, в которых ты не без причины выделяешься.

---

[1] «Мера всех вещей — человек, существующих, что они существуют, и несуществующих, что они не существуют» — главный философский тезис Протагора (Теэтет, 152a). Из этого тезиса проистекает вывод о том, что «знание есть ощущение»; обсуждению этого утверждения посвящена значительная часть диалога «Теэтет» (151d– 183c).

В математике Протагор отвергал те утверждения геометров, которые нельзя воспринять чувственно (откуда можно заключить, что такие утверждения рассматривались и доказывались геометрами середины V в. до н. э.). Ср. Аристотель, *Метафизика* (998a 1–4): «Чувственно воспринимаемые (αἰσθηταί) линии не таковы, как те, о которых говорит геометр; ибо нет такого чувственно воспринимаемого, что было бы прямым (εὐθύ) или закругленным (στρογγύλον) именно таким образом; ведь круг соприкасается с линейкой не в точке, а так, как указывал Протагор, возражая геометрам». (О противопоставлении «чувственно воспринимаемых кругов» и «круга самого по себе» см. **16.4**).

На том же основании Протагор мог отрицать необходимость геометрических доказательств для очевидных фактов. Ср.: Аристотель. Вторая аналитика (87b 35–37): «Даже если бы и можно было воспринимать чувствами, что треугольник имеет углы, равные двум прямым, мы все равно искали бы доказательство этого, а не знали бы уже это, как говорят некоторые». Возможно, что под «некоторыми» здесь подразумевается Протагор или его последователи.

1.10. Парменид, 127ac

Кефал. Антифонт сказал, что, по словам Пифодора, однажды приехали на великие Панафинеи Зенон и Парменид.[1] Парменид был уже очень стар, совершенно сед, но красив и представителен; лет ему было примерно за шестьдесят пять. Зенону же было тогда около сорока, он был высокого роста и приятной наружности, поговаривали, что он был любимцем Парменида. Они остановились у Пифодора, за городской стеной, в Керамике. Сюда-то и пришли Сократ и с ним другие, желая послушать сочинения Зенона, ибо они тогда были привезены впервые им и Парменидом. Сократ был в то время очень молод.[2] <...>

Прослушав все, Сократ попросил прочесть снова первое предположение (ὑπόθεσιν) первого рассуждения и после прочтения его сказал: «Как это ты говоришь, Зенон? Если существует многое (πολλά), то оно должно быть подобным и неподобным (ὅμοιά καὶ ἀνόμοια), а это, очевидно, невозможно, потому что и неподобное не может быть подобным, и подобное неподобным. Не так ли ты говоришь?»

— Так, — ответил Зенон.

— Значит, если невозможно неподобному быть подобным и подобному неподобным, то невозможно и существование многого? Ведь если бы многое существовало, то оно испытывало бы нечто невозможное. Это хочешь ты сказать своими рассуждениями? Хочешь утверждать вопреки общему мнению, что многое не существует[3]?

---

[1] Парменид (первая половина V в. до н. э.) и его ученик Зенон (середина V в. до н. э.) — виднейшие представители элейской школы философии. В истории математики особенно знамениты апории Зенона «Дихотомия» и «Ахилл и черепаха», анализу которых посвящено огромное число сочинений от античности до наших дней.

[2] Действие диалога, пересказанного через третьи руки, происходит около 450 г. до н. э.

[3] «Существует только единое» — основной тезис философии Парменида. Зенон пытался доказать этот тезис от противного, показав, что из предположения о существовании многого вытекают различные противоречия.

2. Арифметика и логистика

2.1. Алкивиад первый, 114c, 126cd

Сократ. Точно так же и относительно чисел один и тот же человек убеждает и одного, и многих.

Алкивиад. Да.

Сократ. И этим человеком будет знаток арифметики (ἀριθμητικός)?

Алкивиад. Конечно. <...>

Сократ. А благодаря какому искусству государства приходят к согласию относительно числа?

Алкивиад. Благодаря арифметике.

Сократ. Ну а частные лица? Разве не благодаря ему же?

Алкивиад. Да.

Сократ. И благодаря ему же каждый согласен с самим собой?

Алкивиад. Да.

Сократ. Ну а благодаря какому искусству каждый согласен с самим собой относительно пяди и локтя[1] — какая из этих мер больше? Разве не благодаря измерительному (μετρητικήν)?

Алкивиад. Как же иначе?

Сократ. И благодаря ему же согласны между собой частные лица и государства?

Алкивиад. Да.

Сократ. Ну а относительно веса разве не так?

Алкивиад. Конечно, так же.

---

[1] Пядь (σπιθαμή) составляет 1/2 локтя (πῆχυς).

2.2. Ион, 531de, 537e

Сократ. Не правда ли, милый мой Ион, когда, например, о числе станут говорить многие, а один будет говорить лучше всех, то ведь кто-нибудь отличит хорошо говорящего?

Ион. Я полагаю.

Сократ. Будет ли это тот же самый, кто отличит и говорящих плохо, или другой человек?

Ион. Конечно, тот же самый.

Сократ. Не тот ли это, кто владеет искусством арифметики?

Ион. Да. <...>

Сократ. Вот, например, я знаю, что здесь пять пальцев, и ты знаешь то же самое; и если бы я тебя спросил, с помощью одного и того же искусства — арифметики — познаем мы одно и то же — и я, и ты, — или же с помощью разных, ты, конечно, сказал бы, что с помощью одного и того же[1].

[1] Сравнивая **1.5** и **2.2**, можно сделать предположительное заключение о том, что непосредственный пересчет предметов относится к [элементарной] арифметике, вычисление же произведения двух чисел, требующее некоторых рассуждений (λόγοι) и обращения к таблице умножения — к [элементарной] логистике.

2.3. Евтифрон, 7bc

Сократ. Давай рассмотрим следующее: если бы, например, у нас с тобою возникло разногласие относительно чисел — какое из них больше, — то разве это разногласие породило бы между нами вражду и взаимный гнев, или же с помощью вычисления (ἐπὶ λογισμόν) мы очень скоро пришли бы к согласию в этом деле?[1]

Евтифрон. Конечно, пришли бы.

Сократ. Значит, и если бы мы разошлись во мнении относительно большего и меньшего размера предмета, то посредством измерений мы быстро прекратили бы спор?

Евтифрон. Да, это так.

Сократ. А перейдя к взвешиванию, мы бы, думаю я, пришли к решению, какой предмет тяжелее, а какой легче?

Евтифрон. Как же иначе?

[1] Как может возникнуть разногласие относительно чисел, какое из них больше, — причем такое, что разрешить его можно «с помощью вычисления»? По-видимому, речь идет о такой задаче, где числа представлены не прямо, но опосредованно, например так: «Что больше, 5 раз по 10 или 4 раза по 12?» (ср.: **3.2**, **3.3**).

2.4. О справедливости, 373cd

Сократ. Измерители решают вопрос о малом и большом, измеряя? Ведь это определяется измерительной линейкой (μέτρον).

Неизвестный. Да, так.

Сократ. А те, кто занимается взвешиванием, решают вопрос о легком и тяжелом, взвешивая? Ведь это определяется весами.

Неизвестный. Да, мы так сказали.

Сократ. А знатоки арифметики (ἀριθμητικοί) решают вопрос о многочисленном и малочисленном, считая (ἀριθμοῦντες)? Ведь это определяется числом.

Неизвестный. Да, так.

2.5. Государство, 521d–525b

(*Сократ.*) Какая же наука (μάθημα) могла бы увлечь душу от становления к бытию[1]? <. . . > Это то общее, чем пользуется любое искусство, а также рассуждения и знания, то, чему каждый человек должен научиться прежде всего.

(*Главкон.*) Что же это?

(*Сократ.*) Да пустяк: надо различать, что такое один, два и три. В общем я называю это счетом и вычислением (ἀριθμόν καὶ λογισμόν). Разве не так обстоит дело, что любое искусство и знание вынуждено приобщаться к нему?

(*Главкон.*) Да, именно так. <. . . >

(*Сократ.*) Если нечто единичное достаточно хорошо постигается само по себе зрением или каким-либо иным чувством, то не возникает стремления выяснить его сущность. <. . . > Если же в нем постоянно видна и какая-то противоположность, так что оно оказывается единицей не более чем ее противоположностью, тогда требуется уже какое-то суждение; в этом случае душа вынуждена недоумевать[2], искать, будоражить в самой себе мысль и задавать себе вопрос: что же это такое — единица сама по себе (αὐτὸ τὸ ἕν)[3]? Таким образом изучение единицы вело бы и побуждало к созерцанию бытия.

(*Главкон.*) Но конечно, это наличествует не в меньшей степени и при рассмотрении одного и того же: мы видим его и как единое, и как бесконечное множество.

(*Сократ.*) Раз так бывает с единицей, не то же ли самое и со всяким числом вообще?

(*Главкон.*) Как же иначе?

(*Сократ.*) Но ведь логистика и арифметика имеют дело с числом?

(*Главкон.*) Конечно.

(*Сократ.*) И оказывается, что как раз они-то и ведут к истине.

[1] Эта же тему Платон обсуждает в «Государстве» применительно к остальным пифагорейским наукам: геометрии (**5.1**), астрономии (**12.1**) и гармонике (**11.3**).

[2] Ср.: **2.6**.

[3] Ср.: **2.16**, **2.17**, **13.6**. О математических объектах «самих по себе» см. раздел 15.

2.6. Государство, 602cd

(*Сократ.*) Одна и та же величина вблизи или издалека кажется неодинаковой из-за нашего зрения.

(*Главкон.*) Да.

(*Сократ.*) То же самое и с изогнутостью и прямизной предметов, смотря по тому, разглядывать ли их в воде или нет, и с их вогнутостью и выпуклостью, обусловленной обманом зрения из-за их окраски. Ясно, что вся эта сбивчивость присуща нашей душе: на такое состояние нашей природы как раз и опираются перспективные изображения (σκιαγραφία) со всеми их чарами[1], да и фокусы и множество других подобных уловок[2].

(*Главкон.*) Правда.

(*Сократ.*) Зато измерение, счет и взвешивание оказались здесь самыми услужливыми помощниками, так что в нас берет верх не то, что кажется большим либо меньшим, многочисленным или тяжелым, а то, что в нас вычисляет, измеряет или взвешивает.

[1] Ср.: *Витрувий.* Об архитектуре (VII, пр., 11): «Впервые в Афинах Агафарх, когда Эсхил ставил трагедию, устроил сцену и оставил об этом исследование. По его почину Анаксагор и Демокрит написали по этому же вопросу: каким образом надлежит сообразно взору глаз и распространению лучей провести линии из помещенного в определенном месте центра сообразно естественной пропорции, чтобы об определенной вещи определенные изображения зданий давали впечатление в сценических декорациях и чтобы из предметов, изображенных в одной плоскости, одни казались находящимися позади, другие — выступающими вперед».

[2] О геометрических софизмах см. **14.3**.

2.7. Хармид, 174b

(*Сократ.*) Благодаря какому знанию человек может знать о настоящем, прошлом и будущем? Уж не разумеешь ли ты игру в шашки?

(*Критий.*) Какие там шашки!

(*Сократ.*) Или же логистику?

(*Критий.*) Вовсе нет.

2.8. Федр, 274cd

Сократ. Я слышал, что возле египетского Навкратиса родился один из древних тамошних богов, которому посвящена птица, называемая ибисом. А самому богу имя было Тевт. Он первый изобрел счет (ἀριθμόν), вычисления (λογισμόν), геометрию, астрономию, вдобавок игру в шашки и в кости, а также и письмена.

2.9. Горгий, 450d

Сократ. А другие искусства достигают всего с помощью слова[1], в деле же, можно сказать, нисколько не нуждаются либо очень мало, как, например, арифметика, логистика, геометрия, даже игра в шашки и многие иные.

---

[1] Об «искусствах, достигающих всего с помощью слова», см. также **4.1**.

2.10. Политик, 258d–260b

Чужеземец. Итак, арифметика и некоторые другие родственные ей искусства свободны (ψιλαί)[1] от практических дел и доставляют одни лишь познания (γνῶναι)?

Сократ мл. Да, это так.

Чужеземец. А строительные искусства и все вообще ремесла обладают знанием (ἐπιστήμην), как бы вросшим в дела, и, таким образом, они создают вещи, которых раньше не существовало.

Сократ мл. Как же иначе?

Чужеземец. Значит, мы разделим все знания надвое и один вид назовем практическим, а другой — познавательным (γνχστικήν). <. . . >

Чужеземец. Существует ли у нас искусство логистики?

Сократ мл. Да.

Чужеземец. Оно, я думаю, несомненно относится к познавательным искусствам.

Сократ мл. Как же иначе?

Чужеземец. Но коль скоро логистика познала различие в числах, мы ведь не припишем ей большей роли, чем роль судьи того, что познано[2]?

Сократ мл. Конечно.

Чужеземец. Ведь и любой зодчий не сам работает, а только управляет рабочими.

Сократ мл. Да.

Чужеземец. И вносит он в это знание, а не ручной труд.

Сократ мл. Это так.

Чужеземец. И справедливо сказать, что он причастен познавательному знанию.

Сократ мл. Бесспорно.

Чужеземец. Но только, я думаю, после того, как он вынесет суждение, это еще не конец, и он не может на этом остановиться, подобно мастеру логистики: он должен еще отдавать приказания — какие следует — каждому из работников, пока они не выполнят то, что наказано.

Сократ мл. Правильно.

Чужеземец. Значит, хотя все такие искусства — связанные с логистикой — познавательные, однако один их род отличает суждение, а другой — приказ?

Сократ мл. По-видимому.

---

[1] Это же слово употребляется в **2.14** как характеристика «чистой» арифметики.

[2] Логистика и арифметика производят *знания* о числах — но не *сами* числа, которые относятся к вечному и неизменному бытию (ср. **2.11**, **2.12**).

2.11. Хармид, 165e

(*Сократ.*) Разве у искусства логистики или у геометрии есть произведения, подобные жилищу, создаваемому искусством строительства, или плащу — творению ткацкого искусства?

2.12. Евтидем, 290bc

(*Сократ.*) Геометры, астрономы и логистики тоже являются охотниками, ибо они не создают сами свои чертежи (διαγράμματα)[1], но исследуют существующие.

---

[1] Ср. примеч. 3 к **1.5**.

2.13. Государство, 340de

(*Фрасимах.*) [Назовешь ли ты] логистиком того, кто ошибается в вычислениях именно тогда, когда он ошибается, и именно за эту его ошибку? Думаю, мы только в просторечье так выражаемся: *ошибся врач*, *ошибся логистик* или *грамматик*. По точному смыслу слова, раз уж ты так любишь точность, никто из мастеров своего дела в этом деле не ошибается.

2.14. Политик, 299e

Чужеземец. ... вся арифметика — чистая (ψιλήν)[1], или плоскостная (ἐπίπεδον), или в применении к глубинам (ἐν βάθεσιν)[2], или же к движущимся сущностям (ἐν τάχεσιν οὖσαν)[3].

---

[1] Арифметика рассматривается здесь не как элементарное искусство счета, но как теоретическая дисциплина. С точки зрения чистой арифметики числа представляют собой совокупности равных между собой единиц (ср.: **2.16**, **2.17**); согласно определению Евклида в «Началах» (VII, опр. 2), «число есть составленное из единиц множество».

Графически такие совокупности изображаются *линейными числами.* При доказательстве арифметических теорем конкретные 5 или 8 точек, выложенных в линию, изображают собой не число 5 или 8, но «число вообще», — так же, как при доказательстве геометрической теоремы конкретный треугольник ABC изображает «треугольник вообще» (ср.: **15.1**). Изображение чисел отрезками, применяемое Евклидом в арифметических книгах «Начал», носит еще более абстрактный характер.

[2] *Плоскостная арифметика* и *арифметика в приложении к глубинам* рассматривают числа, образованные произведением двух и трех сомножителей. Ср.: *Аристотель.* Метафизика (1020b3–6): «Числа имеют определенное качество, например числа составные (σύνθετοι) и простирающиеся не в одном только направлении, но подражающие плоскому и телесному (μίμημα τὸ ἐπίπεδον καὶ τὸ στερεόν); таковы образованные двумя или тремя множителями (ποσάκις ποσοὶ ἤ ποσάκις ποσοί)». *Евклид.* Начала (VII, опр. 17, 18): «Когда два числа, перемножаемые между собой, производят нечто, то возникающее называется *плоскостным* (ἐπίπεδος), стороны же его суть перемножаемые между собой числа. Когда три числа, перемножаемые между собой, производят нечто, то возникающее есть *телесное* (στερεός), стороны же его суть перемножаемые между собой числа». *Евклид.* Начала, (XI, опр. 1): «Тело есть то, что имеет длину, ширину и глубину (στερεόν ἐστι τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον)».

Аналогичное разделение предмета арифметики дает Прокл в «Комментарии к "Началам" Евклида» (39_{14}): «Арифметика делится на рассмотрение чисел линейных, плоскостных и телесных. Причем она исследует виды числа как таковые, начиная с единицы, а также порождение плоскостных чисел, как подобных, так и неподобных, равно как и переход к третьему протяжению (τρίτην αὔξην)». — О *подобных числах* см. примеч. 2 к **5.2**.

[3] Можно предположить, что специфика «арифметики движущихся сущностей» состояла в рассмотрении числовых отношений, возникающих при сравнении двух движений по их быстроте: здесь приходится оперировать отношениями четырех величин в двух парах (время и расстояние).

2.15. Законы, 746e–747a

Следуя общему правилу, надо считать числовое распределение и разнообразие полезным для всего, безразлично, касается ли это чисел самих по себе или же относящихся к длине, глубине, звукам[1] и движению — по прямой вверх и вниз или же круговому[2].

---

[1] О теоретической гармонии см. раздел 11.

[2] Под круговым движением подразумевается прежде всего движение небесных тел (ср.: **12.1**). Движение «по прямой вверх и вниз» — это движение легких и тяжелых тел к своим «естественным местам», учение о котором развил впоследствии Аристотель.

2.16. Государство, 525d–526a

(*Сократ.*) [Логистика] усиленно влечет душу ввысь и заставляет рассуждать о числах самих по себе, ни в коем случае не допуская, чтобы кто-нибудь подменял их имеющими число видимыми и осязаемыми телами[1]. Ты ведь знаешь, что те, кто силен в этой науке, осмеют и отвергнут попытку мысленно разделить самое единицу (τὸ ἕν), но если ты все-таки ее раздробишь, они скорее ее умножат, боясь, как бы единица не оказалась не единицей, а многими долями[2].

(*Главкон.*) Ты совершенно прав.

(*Сократ.*) Как ты думаешь, Главкон, если спросить их: «Достойнейшие люди, о каких числах вы рассуждаете? Не о тех ли, в которых единица действительно такова, какой вы ее считаете, т. е. всякая единица равна всякой единице[3], ничуть от нее не отличается и не имеет в себе никаких частей?»[4] — как ты думаешь, что они ответят?

(*Главкон.*) Да, по-моему, что они говорят о таких числах, которые допустимо лишь мыслить, а иначе с ними никак нельзя обращаться.

---

[1] Стобей (I, пр., 4) приводит следующий фрагмент из «Диатриб» Архита Тарентского, современника Платона: «Думается, что логистика весьма превосходит прочие искусства в том, что касается мудрости, в том числе и геометрическое искусство, ибо она с большей очевидностью трактует то, что ей нужно. И там, где геометрия оказывается бессильной, логистика восполняет доказательства, и равным образом при исследовании видов (εἰδέων) и того, что относится к видам».

[2] Теон Смирнский (18_{18-21}) дает к этому месту следующий комментарий: «Если разделить чувственно воспринимаемую единицу, то она телесно уменьшится и распадется на меньшие части, получаемые при рассечении; но в численном смысле она возрастет, так как на место единицы выступает множество вещей».

[3] Ср.: **2.17**.

[4] Ср.: **13.2**, **13.6**.

2.17. Филеб, 55e–57d

Сократ. Допустим, что кто-нибудь выделит из всех искусств арифметику, измерение и взвешивание, — в таком случае остальное окажется, так сказать, несущественным. <...>

Но не следует ли, Протарх, и эти искусства в свою очередь разделить надвое? Как, по-твоему?

Протарх. О каких искусствах ты говоришь?

Сократ. Во-первых, об арифметике. Не следует ли одну ее часть назвать искусством большинства, другую же — искусством философствующих?

Протарх. На основании какого же признака можно установить различие между двумя этими частями арифметики?

Сократ. Различие здесь немалое, Протарх. Одни ведь подвергают счету и неодинаковые единицы того, что можно подсчитывать, например: два лагеря, два быка и два самых малых или же два величайших предмета. Другие же никогда не последуют за ними, если только не будет допущено, что между многими тысячами единиц не существует никакого различия[1].

Протарх. Ты прекрасно изображаешь немаловажное различие, существующее между людьми, корпящими над числом; так что есть достаточное основание различать две арифметики.

Сократ. Ну а что ты скажешь относительно логистики и измерений, применяемых при постройке домов и в торговле, в отличие от геометрии и вычислений, применяемых в философии: нужно ли назвать то и другое одним искусством или же допустить два? <. . . >

Протарх. Искусства, входящие в круг занятий истинно философствующих, отличаются необычайной точностью и истинностью в отношении мер и чисел. <. . . >

Сократ. Существуют две арифметики и два искусства измерения и эта двойственность присуща всем другим смежным с ними искусствам того же рода, хотя каждое из них и носит одно и то же имя[2].

---

[1] С этим различением *условно одинаковых* предметов счета и *безусловно одинаковых* абстрактных единиц соотносятся приведенные ниже фрагменты Герона Александрийского (I в. н. э.) и Прокла Диадоха (410–485 н. э.) — позднейших авторов платонической традиции. Определение логистики у Герона практически дословно воспроизводит первая половина анонимной схолии к Хармиду, 165e, поэтому здесь приводится лишь вторая половина этой схолии.

Герон. Определения (135, 5–6): «*Логистика* — это теория и занятие, имеющие дело с исчислимым (τῶν ἀριθμητῶν), но не с числами (τῶν ἀριθμῶν); она не рассматривает числа как таковые, но принимает за основание одно как единицу и исчислимое как число, т. е. рассматривает три как тройку и десять как десятку и применяет теоремы арифметики для подобных случаев. Кроме того, логистика, с одной стороны, рассматривает задачу Архимеда о быках*, с другой стороны, число овец и чаш (μηλίτας καὶ φιαλίτας ἀριθμούς), где второе относится к чашам, а первое — к стадам**; в других родах количеств она также объявляет чувственно воспринимаемые тела совершенными. Каков *предмет логистики*? Как уже сказано, это все исчислимое. Здесь наименьшим предметом служит «один» (τὸ ἕν), как в арифметике единица (μονάς), — то, что берут за наименьшее в однородной совокупности: таким будет нераздельный человек в пересчитываемой совокупности людей, и одна неделимая драхма для драхм, если делить деньги».

Схолия к Хармиду, 165e: «Материей [логистики] является все исчислимое: разделы так называемых греческого и египетского способов умножения и деления, соединение и разъединение дробей***, и исследование обозримой материи задач, касающихся треугольных и многоугольных чисел. Ее цель — общение в жизни и польза в торговле, при этом чувственно воспринимаемый предмет она рассматривает как совершенный».

Прокл. Комментарий к «Началам» Евклида (40): «[С арифметикой сходна] логистика, производящая свои построения не с умопостигаемыми числами, но с чувственно воспринимаемыми. <...> Логистик рассматривает числа не сами по себе, но применительно к чувственно воспринимаемым предметам, почему и называет их по тому, что измеряется, например, число овец или чаш. В отличие от арифметики он не допускает существования наименьшего вообще, поскольку наименьшее для него принимает род того, к чему относится; например, один человек является для него мерой соответствующего множества и в этом смысле единицей».

* *Задача о быках*, поставленная Архимедом перед александрийскими учеными, состоит из двух частей. В первой части требуется решить в натуральных числах систему из семи линейных уравнений с восьмью неизвестными. Дополнительное условие второй части приводит к уравнению $x(x+1)/2 = ay^2$ (здесь $a = 51\,285\,802\,909\,803$). Подстановкой $b = 4a$, $z = 2x+1$ это уравнение приводится к виду $z^2 = by^2 + 1$. О методах решения такого уравнения см. примеч. к **7.7**. В данном случае коэффициент b таков, что решение просто физически не может быть найдено (наименьшее $y \approx 1,9 \cdot 10^{103\,264}$).

** В XIV книге Палатинской антологии содержатся арифметические задачи об овцах [или о яблоках: омоним μῆλον означает и овцу, и яблоко; установить его конкретное значение из текста задачи не всегда возможно] (3, 17–19) и о чашах (50). Эти задачи относятся к известному в Древнем Египте еще в XVIII в. до н. э. классу задач на «исчисление кучи» (о египетском происхождении задач «об овцах [о яблоках] и о чашах» см. также **18.3**), словесное условие которых выражается в современных обозначениях некоторым линейным уравнением.

Задачи на «исчисление кучи» могут решаться методом ложного положения. Так, в задаче XIV, 17 в стихотворной форме сформулировано условие, в котором требуется найти общее число овец у шести человек, если известно, что первому принадлежит треть от общего числа, второму — восьмая часть, третьему — четверть, четвертому — пятая часть, пятому — десять овец и шестому — одна овца. Чтобы решить задачу, сначала найдем общее кратное для долей $\{3, 8, 4, 5\}$; оно равно 120. Предположим, что общее число овец равно 120; тогда первые четыре человека вместе имеют $120/3 + 120/8 + 120/4 + 120/5 = 109$ овец. Тогда на двух оставшихся приходится $120 - 109 = 11$ овец. Верный ответ получился сразу же. Если бы не получился, число овец следовало бы увеличить в отношении разности, требуемой по условию, к разности, возникшей при пробе.

*** О применявшихся в греческой логистике приемах умножения и деления, а также о представлении дробей и операциях с ними см. (Выгодский 1967; Еганян 1972).

[2] Счет нарицательных предметов Платон относит к «арифметике большинства» (**2.15**), авторы приведенных выше фрагментов — к логистике. Впрочем, из текстов Платона видно, что слова «логистика» и «арифметика» рассматриваются им зачастую как синонимы.

3. Элементарная арифметика и логистика

3.1. Теэтет, 154c

Сократ. Представь, что у нас есть шесть игральных костей. Если мы к ним приложим еще четыре, то сможем сказать, что их было в полтора раза больше чем тех, что мы приложили, а если прибавим двенадцать, то скажем, что их было вполовину меньше. Иные же подсчеты здесь недопустимы.

3.2. Теэтет, 204b–205a

Сократ. А есть ли различие между «всеми» (τὰ πάντα) и «всем» (τὸ πᾶν)? Например, когда мы говорим: «один, два, три, четыре, пять, шесть», или «дважды три», или «трижды два», или «четыре и два», или «три и два и один», — называем ли мы во всех случаях одно и то же или разные вещи[1]?

Теэтет. Одно и то же.

Сократ. Отличное от шести?

Теэтет. Нет[2].

---

[1] Ср. примеч. к **2.3**.

[2] Ср.: *Аристотель.* Метафизика (1020b6–8): «Качество — это то, что входит в сущность чисел помимо количества, ибо сущность каждого числа — это то, что оно единожды, например: сущность шести — не то, что в нем дважды или трижды, а то, что в нем единожды, ибо шесть есть единожды шесть».

3.3. Государство, 337ab

(*Сократ.*) Ты мудр, Фрасимах, и прекрасно знаешь, что если ты спросишь, из каких чисел состоит двенадцать, но, задавая свой вопрос, заранее предупредишь: «Только ты мне не вздумай говорить, братец, что двенадцать — это дважды шесть, или трижды четыре, или шестью два, или четырежды три, иначе я и слушать не стану, если ты будешь молоть такой вздор», то тебе будет заранее ясно, думаю я, что тебе никто не ответит на такой твой вопрос.

3.4. Законы, 737e–738a; 745bd, 746de, 771ac

Афинянин. Пусть будущих граждан будет пять тысяч сорок[1]. Это — число подходящее, так земледельцы смогут отразить врага от своих наделов. На столько же частей будут разделены земля и жилища; человек и участок, полученный им по жребию, составят основу надела. Все указанное число можно прежде всего разделить (νεμηθήρω) на две части, затем на три. По своей природе оно делится и на четыре, и на пять, и так вплоть до десяти. Что касается чисел, то всякий законодатель должен отдавать себе отчет в том, какое число и какие свойства числа всего удобнее для любых государств. Мы признаем наиболее удобным то число, которое обладает наибольшим количеством последовательных делителей (διανομάς). Конечно, всякое число имеет свои разнообразные разделения (τομάς); число же пять тысяч сорок имеет целых пятьдесят девять разделений (τομῶν)[2], последовательных же — от единицы до десяти. <...>

Надо разбить страну на двенадцать частей. <...> Граждан также надо разделить на двенадцать частей. Вслед за тем эти двенадцать наделов надо поделить между двенадцатью богами и каждую определенную жребием часть посвятить тому или иному богу, назвав его именем. Такая часть будет носить название филы. В свою очередь и город надо разделить на двенадцать частей, точно так же как разделена остальная страна. <...>

Теперь нужно внимательно рассмотреть, какой смысл в этом принятом нами разделении на двенадцать частей. Ведь внутри этих двенадцати частей есть много подразделений, а также других, вытекающих из этих последних как их естественное порождение. Так мы дойдем и до числа пять тысяч сорок. Этими подразделениями будут: фратрии, демы, комы, военные отряды в бою и на марше; будут и такие подразделения, как деньги, меры веса, сухих и жидких тел[3]. Закон должен установить соразмерность и взаимную согласованность всего этого. <...>

Нам надо вспомнить о числе пять тысяч сорок: на сколько удобных частей оно делилось — да и делится — как вообще, так и по филам? Каждая фила составляет, как мы положили, одну двенадцатую часть этого числа и образуется всего правильнее путем умножения числа двадцать один на двадцать[4]. Общее наше число делится на двенадцать частей, на столько же делится число, составляющее филу[5]. Следует вдуматься в то, что каждая такая часть — это священный дар бога: она соответствует месяцам и обращению вселенной. <...> Мы в высшей степени верно выбрали раньше это число пять тысяч сорок, ведь у него есть различные делители (διαναμάς), начиная от единицы до двенадцати, за исключением числа одиннадцать. Но и здесь очень легко помочь беде: если от этого числа отнять два очага, то все придет в порядок[6]. Истину этого вымысла не сложно показать на досуге.

---

[1] $5040 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$.

[2] Чтобы найти число делителей числа P (включая 1 и P), надо разложить P на простые множители и взять произведение чисел, каждое из которых на единицу больше показателя степени при одном из простых множителей. Для числа $5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$ число делителей равно $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 60$. У Платона названо число 59, на единицу меньшее. Дело в том, что античные математики само число P в число своих делителей (= «аликвотных частей») не включали. Ср. *Евклид.* Начала (VII, опр. 3): «Часть (μέρος) есть число в числе, *меньшее в большем*, если оно измеряет (καταμετρῇ) большее». Комбинаторными исследованиями занимался Ксенократ Халкедонский, ученик Платона. Согласно свидетельству Плутарха в

«Застольных вопросах» (733a), он подсчитал число слогов, которое может получиться из сочетания букв друг с другом.

[3] Для сравнения рассмотрим, как образуются системы мер, употреблявшиеся в Афинах:

Жидкие и сыпучие тела: 1 киаф = [0,045 л], 1 котюла = 6 киафов = [0,27 л].

Жидкие тела: 1 хус = 12 котюл = [3,28 л], 1 метрет = 12 хусов = [39,46 л].

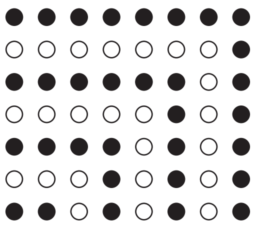
Сыпучие тела: 1 хойникс = 4 котюлы = [1,09 л], 1 медимн = 48 хойниксов = [52,5 л].

Вес (и деньги): 1 обол = [0,73 г]; 1 драхма = 6 оболов = [4,4 г], 1 тетрадрахма = 4 драхмы = [17,4 г], 1 мина = 100 драхм = [0,4366 кг], 1 талант = 60 мин = [26,196 кг].

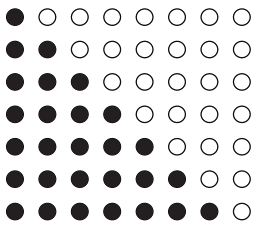
[4] $5040 = 12 \cdot 420$. Почему Платон говорит, что представить 420 в виде $21 \cdot 20$ будет *правильнее всего*? Может быть, потому, что в этом случае оно приобретает вид *гетеромекного числа* (т. е. такого плоскостного числа, стороны которого различаются на единицу). Гетеромекное число по форме ближе всего к квадратному; квадратное же число — «самое правильное».

Продолговатое число общего вида $m\,(m+n)$ называлось προμήκης ἀριθμός, а продолговатое число специального вида $m\,(m+1)$ — ἑτερομήκης ἀριθμός. Такое различение упоминается Никомахом Геразским во «Введении в арифметику» (II, 17). Впрочем, оно не проводится последовательно в других античных математических текстах.

Все гетеромекные числа являются четными, что можно показать несколькими способами: (1) любое гетеромекное число может быть представлено в виде суммы последовательных четных чисел, начиная с двойки (рис. 2, *а*), а сумма любого набора четных чисел является четной; (2) любое гетеромекное число может быть представлено в виде суммы двух одинаковых треугольных чисел (рис. 2, *б*); (3) разнясь на единицу, стороны любого гетеромекного числа имеют разную четность, а произведение двух чисел разной четности является четным.



а



б

Рис. 2.

Противопоставление квадратных и гетеромекных чисел в десятой паре пифагорейского списка противоположностей, приведенного Аристотелем в «Метафизике» (986a26) (см. примеч. 1 к **16.3**) связано скорее всего с тем, что всякое квадратное число представляет собой сумму последовательных нечетных чисел, начиная с единицы, а всякое гетеромекное число представляет собой сумму последовательных четных чисел, начиная с двойки. Этому соответствует противопоставление нечетного и четного числа во второй паре.

[5] $420 = 12 \cdot 35$.

[6] $5040 - 2 = 5038 = 11 \cdot 458$.

3.5. Законы, 756b

Афинянин. Совет пусть состоит из тридцати дюжин членов. Число 360 допускает удобное деление[1].

[1] Число $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ имеет $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ делителя — и 23 различных «части» (см.: **3.4**).

4. Четные и нечетные числа

4.1. Горгий, 451ac, 453e–454a, 460e

Сократ. Если бы кто спросил меня о любом из искусств, которые мы сейчас называли, например: «Сократ, что такое искусство арифметики?» — я бы ответил вслед за тобою, что это одно из искусств, обнаруживающих свою силу в слове. А если бы дальше спросили: «На что направлена эта сила?» — я бы сказал, что на познание четных и нечетных чисел, каковы бы ни были те и другие[1]. Если спросили бы: «А искусством счета ты что называешь?» — я бы сказал, что и оно из тех искусств, которые всего достигают словом. И если бы еще спросили: «На что же оно направлено?» — я ответил бы наподобие тех, кто предлагает новые законы в Народном собрании, что во всем прочем искусство счета одинаково с арифметикой: ведь оно обращено на то же самое, на четные и нечетные числа[2], отличается же лишь тем, что и в четном, и в нечетном старается установить количество в отношении к себе и к иному (πρὸς αὑτὰ καὶ πρὸς ἄλληλα)[3]. <...> Если нас спросят: «Мастером какого убеждения является искусство арифметики и на что оно направлено?» — мы, вероятно, ответим: «Поучающего, что такое четные и нечетные числа и каковы их свойства». <...> В начале нашей беседы, Горгий, мы говорили, что красноречие применяется к рассуждениям о справедливом и несправедливом, а не о четных и нечетных числах.

[1] Выражение «каковы бы ни были те и другие» отсылает к пифагорейской *теоретической арифметике*, в которой рассматривались теоремы, справедливые для *произвольных* четных или нечетных чисел, например такие: «Если складывается сколько угодно четных чисел, то целое будет четным» (*Евклид.* Начала. IX, 21).

В предложениях 21–36 IX книги «Начал» излагаются элементарные теоремы такой арифметики; венчает эту последовательность теорема о совершенных числах вида $2^n(2^{n+1} - 1)$ (см. примеч. 1 к **7.7**). Вся эта серия предложений представляет собой пифагорейскую математическую книгу, датируемую приблизительно первой половиной V в. до н. э.

[2] Олимпиодор в «Комментарии к Горгию» (4, 14) говорит о том, что арифметика имеет дело с самим видом (περὶ τὸ εἶδος αὐτῶν) четных и нечетных чисел,

а логистика — с их материей (ὕλην). По-видимому, по отношению к логистике выражение «четные и нечетные числа» означает "всевозможные числа», поскольку видовое различение четных и нечетных чисел оказывается в ней несущественным.

[3] К этому месту имеется анонимная схолия: «само к себе — как если бы умножалось четное на четное или нечетное на нечетное; к иному — как если бы нечетное на четное или наоборот». Такой же комментарий приводит и Олимпиодор в «Комментарии к Горгию» (4, 15).

4.2. Хармид, 166a

(*Сократ.*) Логистика имеет дело с четным и нечетным и с вопросом о том, каково их количество в отношении к себе и к иному[1].

---

[1] Дословно воспроизведена та же формула, что и в **4.1**.

4.3. Теэтет, 198a

Сократ. Предположи, что арифметика — это охота за всевозможными знаниями четного и нечетного.

4.4. Протагор, 356e-357a

(*Сократ.*) А если бы благополучие нашей жизни зависело от правильного выбора между четным и нечетным — от того, что один раз правильно будет выбрать большее, а другой — меньшее безотносительно к тому, больше оно само по себе или по сравнению с чем-нибудь другим, вблизи ли оно находится или вдали[1], то что сберегло бы нам жизнь? Не знание ли? И не искусство ли измерять, что больше, что меньше? А так как дело идет о нечетных и четных числах, то это не что иное, как арифметика.

---

[1] Ср.: **2.6**.

4.5. Послезаконие, 990c

Афинянин. Следовательно, должны существовать математические науки (μαθημάτων). Главная и первая из них — это наука о самих числах, но не о телесных (σώματα)[1], а вообще о порождении четного и нечетного и о той мощи (δυνάμεως), которую они имеют по отношению к природе вещей.

---

[1] Под «телесными числами» могут подразумеваться как нарицательные числа (см. примеч. к **2.17**), так и числа, образованные произведением трех сомножителей (см. примеч. 2 к **2.14**).

4.6. Федон, 103e–105b

(*Сократ.*) Нечетное всегда должно носить то имя, каким я его обозначаю, или не всегда?

(*Кебет.*) Разумеется, всегда.

(*Сократ.*) Но одно ли оно из всего существующего — вот что я хочу спросить, — или же есть еще что-нибудь: хоть оно и не то же самое, что нечетное, все-таки кроме своего особого имени должно всегда называться нечетным, ибо по природе своей неотделимо от нечетного? То, о чем я говорю, видно на многих примерах, и в частности на примере числа «три». Поразмысли-ка над тройкой. Не кажется ли тебе, что ее всегда надо обозначать и своим именем, и именем нечетного, хотя нечетное и не совпадает с тройкой[1]? Но такова уж природа и тройки, и пятерки, и вообще половины всех чисел[2], что каждое из них всегда нечетно и все же ни одно полностью не совпадает с нечетным. Соответственно два, четыре и весь другой ряд чисел всегда четны, хотя ни одно из них не совпадает полностью с четным. Согласен ты со мною или нет?

(*Кебет.*) Как не согласиться!

(*Сократ.*) Тогда следи внимательнее за тем, что я хочу выяснить. Итак, по-видимому, не только все эти противоположности не принимают друг друга, но и все то, что не противоположно друг другу, однако же постоянно несет в себе противоположности, как видно, не принимает той идеи, которая противоположна идее, заключенной в нем самом, но, когда она приближается, либо гибнет, либо отступает перед нею. Разве мы не признаем, что число «три» скорее погибнет и претерпит все, что угодно, но только не станет, будучи тремя, четным?

(*Кебет.*) Несомненно, признаем.

(*Сократ.*) Но между тем двойка не противоположна тройке?[3]

(*Кебет.*) Нет, конечно. <. . . .>

(*Сократ.*) Я сказал, что мы должны определить, что, не будучи противоположным некоторой сущности, все же не приемлет ее, как противоположную. Вот, например, тройка: она не противоположна четному и тем не менее не принимает его, ибо привносит нечто всегда ему противоположное. Равным образом двойка привносит нечто противоположное нечетности, огонь — холодному и так далее. Теперь гляди, не согласишься ли ты со следующим определением: не только противоположное не принимает противоположного, но и то, что привносит нечто противоположное в другое, приближаясь к нему, никогда не примет ничего сугубо противоположного тому, что оно привносит. Вспомни-ка еще раз (в этом нет вреда — слушать несколько раз об одном и том же): пять не примет идеи четности, а десять, удвоенное (τὸ διπλάσιον), — идеи нечетности. Разумеется, двойное имеет другую противоположность (ἐναντίον)[4], но вместе с тем идеи нечетности оно не примет. Так же ни полуторное (τὸ ἡμιόλιον), ни любое иное в том же роде, [содержащее] половину (τὸ ἥμισυ), не примет идеи целого (τοῦ ὅλου). И ни треть (τριημόριον), ни все прочее, сходное с ней[5]. Надеюсь, ты поспеваешь за мною и разделяешь мой взгляд.

(*Кебет.*) Да, разделяю, и с величайшей охотой!

(*Сократ.*) Тогда вернемся к началу. Только теперь, пожалуйста, отвечай мне не так, как я спрашиваю, но подражая мне. Дело в том, что помимо прежнего надежного ответа я усмотрел по ходу нашего рассуждения еще и другую возможность. Если бы ты спросил меня, что должно появиться в теле, чтобы оно стало теплым, я бы уже не дал того надежного, но невежественного ответа, не сказал бы, что теплота, но, наученный нашим рассуждением, ответил бы потоньше — огонь. И если ты спросишь, от чего тело становится недужным, не скажу, что от недуга, но — от горячки. Подобным же образом, если ты спросишь меня, что должно появиться в числе, чтобы оно сделалось нечетным, я отвечу, что не нечетность (περιττότης), но единица (μονάς)[6].

---

[1] «Нечетное» есть вид числа, «тройка» — один из принадлежащих к этому виду индивидов. Все утверждения, истинные для нечетного, будут истинны и для тройки; но обратное неверно.

[2] Деление чисел на четные и нечетные представляется Платону делением всего бесконечного множества чисел на две равные половины (ср. **4.7**).

[3] Двойка и тройка сами по себе не противоположны друг другу (отдельные числа вообще не имеют противоположностей), хотя они и относятся к противоположным видам числа (если вообще можно считать, что четные числа противоположны нечетным).

[4] Предполагается, что двойному противоположно половинное. Другой точки зрения придерживался Аристотель (Категории, 6b18–19): «Не все соотнесенное (πρός τι) имеет противоположность себе: двойному ничто не противоположно, равно как и тройному, и вообще ничему подобному им». Согласно Аристотелю, двойное и половинное соотнесены, но не противоположны.

[5] Никомах Геразский во «Введении в арифметику» (I, 18–23) приводит следующую классификацию различных целочисленных отношений (здесь $k < n$):

1а) πολλαπλάσιος λόγος $= n : 1$
1б) ὑποπολλαπλάσιος λόγος $= 1 : n$
2а) ἐπιμόπος λόγος $= (n + 1) : n$
2б) ὑπεπιμόρος λόγος $= n : (n + 1)$
3а) ἐπιμέρης λόγος $= (n + k) : n$
3б) ὑπεπιμέρης λόγος $= n : (n + k)$
4а) πολλαπλασιεπιμόρος λόγος $= (mn + 1) : n$
4б) ὑποπολλαπλασιεπιμόρος λόγος $= n : (mn + 1)$
5а) πολλαπλασιεπιμέρης λόγος $= (mn + k) : n$
5б) ὑποπολλαπλασιεπιμέρης λόγος $= n : (mn + k)$

[6] «Появиться в числе» = «появиться в определении числа». К родовому *определению числа* следует добавить видовое уточнение, «имеющее в своем составе непарную единицу», чтобы получилось определение *нечетного* числа (ср. **4.9**).

4.7. Политик, 262de

Чужеземец. [Такая ошибка возникла бы], если бы кто-нибудь вздумал разделить число на два вида и, выделив из всех чисел десять тысяч, представил бы это число как один вид, а всему остальному дал бы одно имя и считал бы из-за этого прозвища, что это единый вид, отличный от того, первого. Но гораздо лучше и сообразнее с видовой дихотомией было бы, если бы мы разделили числа на четные и нечетные[1].

[1] Деление бесконечного множества натуральных чисел «на две равные половины» Платон считает наилучшим из всех возможных (ср. **4.6**). Но ведь возможны и другие способы деления всех натуральных чисел, например на простые и составные, и т. д.

4.8. Евтифрон, 12cd

Сократ. Нечетное есть часть (μόριον)[1] числа, однако дело обстоит не так, чтобы там, где было число, было и нечетное; наоборот, где нечетное, там и число. <...> Если бы ты спросил меня, к примеру, какою частью (μέρος) числа будет четное и что оно собой представляет, я ответил бы, что это число, не хромое на одну ногу, но равнобедренное (ἰσοσκελής)[2].

[1] Слово «часть» употребляется здесь в смысле «разновидность». Ср.: *Аристотель.* Метафизика (1023b12–25): «Частью (μέρος) называется [1а] то, на что можно так или иначе разделить некоторое количество (ибо то, что отнимается от количества, всегда называется частью его, например: два в некотором смысле есть часть трех); [1б] в другом смысле частями называются только те, что служат мерой; поэтому два в одном смысле есть часть трех, а в другом нет; [2] то, на что можно разделить вид (εἶδος), не принимая во внимание количество, также называется частями его; поэтому о видах говорят, что они части рода; [3] то, на что делится или из чего состоит целое — или образ (εἶδος), или то, что имеет образ; например, у медного шара или у медной игральной кости и медь (т. е. материя, которой придана форма) и угол суть части; [4] то, что входит в определение, разъясняющее каждую вещь, также есть части целого; поэтому род называется и частью вида, хотя в другом смысле вид — часть рода».

[2] Здесь употреблено то же название, что и для равнобедренного треугольника. На схеме произвольное четное число может быть изображено состоящим из двух равных половин, у нечетного числа одна половина длиннее другой на единицу (рис. 3). Посредством таких изображений доказываются теоремы о четности суммы двух четных чисел; четности суммы двух нечетных чисел; нечетности суммы четного и нечетного числа.

В античной арифметике четному и нечетному числу придавался и другой графический облик. Никомах Геразский во «Введении в арифметику» (I, 7) пишет: «Четное число таково, что его можно разделить на две равные части без единицы, находящейся в середине; а нечетное число таково, что оно не может быть разде-

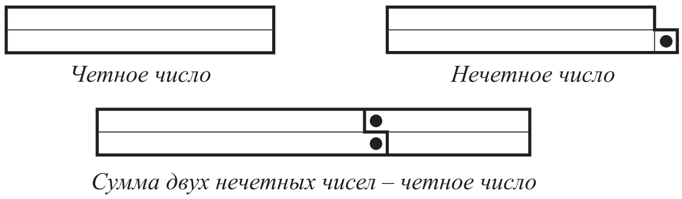


Рис. 3.

лено на две равные части из-за названного выше включения единицы» (ср. также приводимые Стобеем фрагменты из сочинений Аристоксена (проэмий, 6) и Плутарха (проэмий, 10)). По-видимому, этот облик связан с возможностью установить без пересчета, является ли данное линейное число четным либо нечетным. Для этого нужно одновременно начать отсчитывать по единице с обоих его концов. Если останется одна лишняя единица в середине, то число будет нечетным; если не останется ни одной — четным.

4.9. Законы, 895e

Афинянин. Применительно к числу [деление пополам] получает имя «четное»; его определение (λόγος): «число, делящееся на две равные части»[1]. <. . . > Ведь мы обозначаем одну и ту же вещь с помощью имени «четный» и посредством определения «число, делящееся на две части».

[1] Ср. *Евклид.* «Начала» (VII, опр. 6, 7): «Четное число есть делящееся пополам. Нечетное же — не делящееся пополам или отличающееся на единицу от четного числа».

4.10. Парменид, 143d–144a

Парменид. Когда перед нами два, есть ли какая-либо возможность, чтобы каждое из них не было одним?

Аристотель. Нет, никакой.

Парменид. Но каждая из взятых представляет собою парное сочетание (σύνδυο); следовательно, каждый из них будет одним.

Аристотель. Очевидно.

Парменид. Если же каждый из них один, то при сложении какой угодно единицы с любым парным сочетанием не становится ли все вместе тремя?

Аристотель. Да.

Парменид. А не есть ли три — нечетное число, а два — четное?

Аристотель. Как же иначе?

Парменид. Далее, когда есть два, то необходимо ли, чтобы было и дважды, а когда есть три — трижды, коль скоро в двух содержится дважды один, а в трех трижды один?

Аристотель. Необходимо.

Парменид. А когда есть два и дважды, то не необходимо ли, чтобы было и дважды два? И когда есть три и трижды, ни необходимо ли также, чтобы было трижды три?

Аристотель. Как же иначе?

Парменид. Далее, когда есть три и дважды, а также два и трижды, то не необходимо ли быть дважды трем и трижды двум?

Аристотель. Безусловно, необходимо.

Парменид. Следовательно, могут быть [числа] четно-четные (ἄρτια ἀρτιάκις), а также нечетно-нечетные (περιττὰ περιττάκις), четно-нечетные (ἄρτια περιττάκις) и нечетно-четные (περιττὰ ἀρτιάκις)[1].

Аристотель. Конечно.

Парменид. А если это так, то не думаешь ли ты, что остается какое-либо число, существование которого не необходимо?

Аристотель. Нет, не думаю[2].

Парменид. Следовательно, если существует одно (ἕν), то необходимо существует и число[3].

---

[1] Ср. *Евклид*. Начала (VII, опр. 8–11): «Четно-четное число есть четным числом измеряемое четное число раз. Четно-нечетное есть четным числом измеряемое нечетное число раз. Нечетно-четное есть нечетным числом измеряемое четное число раз. Нечетно-нечетное есть нечетным числом измеряемое нечетное число раз». Определение 10 встречается лишь в одном списке «Начал»; оно и в самом деле является лишним, поскольку четно-нечетное и нечетно-четное числа разнятся здесь лишь порядком сомножителей.

Эти определения не категоричны; так, число 12 можно представить и как четно-четное $12 = 6 \cdot 2$, и как четно-нечетное $12 = 4 \cdot 3$. В схолиях к этим определениям упомянуты и другие, категоричные определения: «Пифагорейцы делили числа на четные и нечетные; четные же — на четно-четные, четно-нечетные и нечетно-четные. Четно-четным они называли число, которое делится пополам вплоть до единицы, четно-нечетным — то, которое сразу же после первой дихотомии оказывается далее неделимым, например 10, разделенное на 5 и 5, а нечетно-четным — то, которое допускает большее число делений, например 12». Такие же категоричные определения приводят Никомах Геразский во «Введении в арифметику» (I, 7) и Олимпиодор в «Комментарии к Горгию» (4. 8). О том, зачем пифагорейцам была нужна такая классификация четных чисел, см. примеч. 3 к **7.4**.

[2] Простые числа не могут быть получены умножением, но только сложением.

[3] «Число» рассматривается здесь как общий род для всех чисел-индивидов, т. е. как «совокупность всех чисел». Остается неясным, почему рассуждение не строится по более простой схеме математической индукции: «при прибавлении к любому числу единицы сумма становится числом, на единицу большим»?

4.11. Гиппий больший, 302a–303b

Сократ. Если каждый из нас один, то, пожалуй, он будет также и нечетным; или ты не считаешь «один» нечетным числом?[1]

Гиппий. Считаю.

Сократ. Значит, и оба вместе мы нечет, хотя нас и двое?

Гиппий. Не может этого быть, Сократ.

Сократ. Тогда мы оба вместе четны. Не так ли?

Гиппий. Конечно.

Сократ. Но ведь из-за того, что мы оба вместе — четны, не будет же четом и каждый из нас?

Гиппий. Нет, конечно. <. . .>

Сократ. И что мешает, чтобы четное число состояло из двух нечетных или же двух четных?[2]<. . .>[3]

---

[1] Платон называет «один» нечетным числом — и, стало быть, считает его числом. Однако имелось и другое воззрение на него. Аристотель в «Физике» (220a27) пишет: «Наименьшее число как таковое есть двойка». В трактате «О душе» (409a8) он же выражается так: «если от числа отнять число или единицу. . . ». Ведь если «число есть множество, составленное из единиц» (*Евклид.* Начала, VII, опр. 2), то при буквальном понимании этого определения имеется резон не считать единицу числом, поскольку она представляет собой не множество, но единство.

[2] Ср. *Евклид.* Начала (IX, 24): «Если от четного числа отнимается четное, остаток будет четным»; (IX, 25): «Если от четного числа отнимается нечетное, остаток будет нечетным».

[3] Продолжение отрывка см. в разделе 7.1.

5. Планиметрия и стереометрия

5.1. Государство, 527ab

(*Сократ.*) Если [геометрия] принуждает созерцать сущность, она нам годится, если же становление — тогда нет.

(*Главкон.*) Действительно, мы так утверждаем.

(*Сократ.*) Но кто хоть немного знает толк в геометрии, не будет оспаривать, что само это знание полностью противоположно тем словесным выражениям, которые в ходу у занимающихся им.

(*Главкон.*) То есть?

(*Сократ.*) Они выражаются как-то очень забавно и принужденно. Словно они заняты практическим делом и имеют в виду интересы этого дела, они употребляют выражения «квадрируем» (τετραγωνίζειν)[1], «приложим» (παρατείνειν)[2], «наложим» (προστιθέναι) и так далее, все это так и сыплется из их уст. А между тем это ведь наука (μάθημα), которой занимаются ради познания[3].

(*Главкон.*) Разумеется.

(*Сократ.*) Не оговорить ли нам еще вот что…

(*Главкон.*) А именно?

(*Сократ.*) Это наука, которой занимаются ради познания вечного бытия, а не того, что возникает и гибнет[4].

[1] Ср. *Аристотель.* О душе (413a17–20): «Что такое квадрирование? Превращение разностороннего прямоугольника в равный ему равносторонний. И это следует из определения. Утверждающий же, что квадрирование есть нахождение средней, говорит о причине действия». Решение задачи о квадрировании прямоугольника приводит Евклид в «Началах» (II, 14).

[2] О приложении площадей см. также **5.4**.

[3] О противоположности *практики* (т. е. производства новых вещей) и *познания*, относящегося к чистому вневременному бытию, см. **2.9–2.12**.

[4] Плутарх в «Жизнеописании Марцелла» (14) говорит о неприязни Платона к употреблению в геометрии рассуждений и выражений, связанных не с чистым вневременным бытием, а с происходящим во времени становлением, в следующих словах: «Многими любимому и знаменитому искусству изготовления инструментов (ὀργανικήν) положили начало Евдокс и Архит, стремившиеся украсить геометрию, а также с помощью чувственных и инструментальных примеров разрешить те вопросы, для которых затруднено доказательство посредством одних лишь рассуждений и проведения линий (λογιςῆς καὶ γραμμικῆς); такова проблема вставки двух средних в непрерывной пропорции — необходимый элемент многих задач, для разрешения которой оба пользовались инструментами, подгоняя средние пропорциональные с помощью дуг и сегментов. Но так как Платон негодовал, упрекая их в том, что они губят достоинство геометрии, которая от бестелесного и умопостигаемого опускается до чувственного и вновь сопрягается с телами, требующими для своего изготовления длительного и тяжелого труда ремесленника, — механика полностью отделилась от геометрии, и долгое время не привлекала внимания философии, сделавшись одним из военных искусств».

Вставка двух средних в непрерывной пропорции требуется при решении задачи об удвоении куба (ср. **5.3**, **6.3**). Следует заметить, что решения этой задачи, данные Архитом Тарентским и Евдоксом Книдским (см. Прасолов, 1997), отнюдь не основаны на «подгонке», о которой говорит Плутарх, но представляют собой вполне корректные пространственные построения.

5.2. Послезаконие, 990cd

Кто усвоил [арифметику], тот может перейти к тому, что носит весьма смешное имя геометрии[1]. На самом деле ясно, что это наука о том, как уподоблять на плоскости числа, по природе своей неподобные[2]. Кто умеет соображать, тому ясно, что речь идет здесь прямо-таки о божественном, а не человеческом чуде[3]. Вслед за этой наукой идет еще одна, ей подобная; люди, ею занимающиеся, назвали ее стереометрией. Наука эта изучает тела, имеющие три протяжения (τρὶς ηὐξημένους) и либо подобные друг другу по своей телесной природе, либо неподобные, уподобляемые с помощью искусства[4].

[1] Букв. «землемерие».

[2] Ср. *Евклид.* Начала (VII, опр. 22): «*Подобные* (ὅμοιοι) плоскостные и телесные числа суть имеющие пропорциональные стороны».

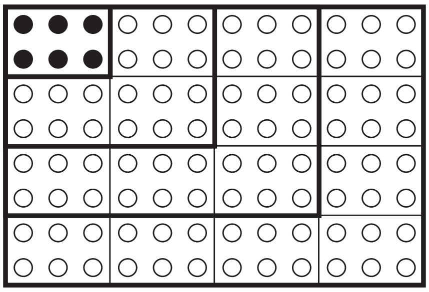


Рис. 4.

Пусть числа A и B — взаимно простые («первые между собой» (πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους), по выражению древних греков). Тогда подобными между собой будут любые два плоских числа вида $kA \times kB$. Два числа P и Q «уподобляются в плоскости», т. е. представляются в виде двух подобных плоскостных чисел, в том и только в том случае, если они относятся друг к другу как квадратные числа (в самом деле, $[kA \times kB] : [mA \times mB] = k^2 : m^2$). В противном случае их «уподобление» производится геометрически, построением двух квадратов площадью в P и Q единиц. Простейший случай такого уподобления — удвоение квадрата (ср. **6.1**).

[3] Задача, конечно, интересная, — но почему Платон (или его ученик и секретарь Филипп Опунтский, которому приписывается авторство «Послезакония») ограничивает этой частной задачей все содержание геометрии?

[4] Пусть числа A, B, C являются взаимно простыми. Тогда подобными между собой будут любые два телесных числа вида $kA \times kB \times kC$. Два телесных числа P и Q «уподобляются телесно», т. е. представляются в виде двух подобных телесных чисел, в том и только в том случае, если они относятся друг к другу как кубические числа. В противном случае «уподобление» производится геометрически, построением двух кубов объемом в P и Q единиц. Простейший случай такого уподобления — удвоение куба (ср. **5.3**, **6.3**).

5.3. Государство, 528ac

(*Сократ.*) После плоскостей мы взялись за тела, находящиеся в круговращении (ἐν περιφορᾷ)[1], а надо бы раньше изучить их самих по себе; ведь правильнее было бы после второй протяженности (δευτέραν αὔξην) рассмотреть третью, относящуюся к кубам и всему, что имеет глубину.

(*Главкон.*) Это так, Сократ, но здесь, кажется, ничего еще не открыли[2].

(*Сократ.*) Я думаю, причина тут двоякая: нет такого государства, где наука эта была бы в почете, а исследуют ее слабо, так как она трудна. Исследователям нужен руководитель, без которого им не сделать открытий. Появиться такому руководителю нелегко, а если даже он и появится, то при нынешнем положении дел те, кто исследует эти вещи, не стали бы его слушать из-за своего высокомерия[3]. Если бы все государство в целом уважало такие занятия и содействовало им, они подчинились бы, и путем продолжительных и упорных поисков было бы открыто то, что следует. Ведь даже и теперь, когда большинство не оказывает почета этим занятиям и препятствует им, да и сами исследователи не отдают себе отчета в их полезности, они все же вопреки всему этому развиваются, настолько они привлекательны. Поэтому не удивительно, что наука эта появилась на свет.

[1] То есть за теоретическую астрономию (см. раздел 11).

[2] Когда писалась VII книга «Государства», задача об удвоении куба уже была поставлена и исследовалась Гиппократом Хиосским (см. примеч. к **6.3**), но ее решение либо еще не было найдено Архитом Тарентским, либо Платон об этом решении не знал (ср. **5.2**, **6.3**).

[3] Этот пассаж часто интерпретировали в том смысле, что Платон и в самом деле играл роль организатора научных исследований и «методолога», указывавшего математикам, примыкавшим к Академии, какие именно проблемы и каким именно способом предпочтительно решать. Ср. *Филодем.* История Академии (геркуланский папирус 1021, V): «В это время математические науки достигли большого успеха, причем Платон был организатором этого процесса и ставил проблемы перед математиками, которые их затем ревностно решали. Именно таким образом метрология впервые достигла наивысшей точки развития, равно как и проблемы, касающиеся определений, когда Евдокс и его школа обновили старинный метод Гиппократа».

5.4. Менон, 86e–87b

Сократ. Когда я говорю «исходя из предположения (ἐξ ὑποθέσεως)», я имею в виду то же, что часто делают геометры в своих исследованиях. Если кто-нибудь спросит их насчет площадей — можно ли в данный круг вписать данную треугольную площадь[1], один из них, вероятно, ответит: «Я не знаю, возможно ли это, но считаю, что нам будет полезно исходить из некоего предположения. Если эта площадь такова, что к данной линии она прикладывается с недостатком такой же площади, которая к ней уже приложена (εἰ μέν ἐστιν τοῦτο τὸ χωρίον τοιοῦτον οἷον παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμὴν παρατείναντα ἐλλείπειν τοιούτῳ χωρίῳ οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ᾖ), то, думаю я, получится одно, а если этого сделать нельзя, получится совсем другое. Исходя из этого положения, я охотно скажу, что у нас получится — можно ли вписать ее в данный круг или нельзя»[2].

[1] То есть треугольник данной площади (при этом сама площадь скорее всего представлена в виде квадрата — прообраза всякой площади).

[2] Поставленная задача может быть решена лишь при выполнении некоторого разграничительного условия — *диоризма*. Из всех треугольников, вписанных в данный круг, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник. И если данная площадь будет больше площади этого равностороннего треугольника, то вписать ее в данный круг не удастся.

Платоново *предположение* как раз и является таким диоризмом. Описывая его, Платон упоминает пифагорейскую задачу о *приложении площади с недостатком* (ἔλλειψις). Задача о приложении с недостатком данной площади S к данному отрезку AB состоит в отыскании на AB такой точки C, чтобы прямоугольник со сторонами AC и BC имел площадь S (рис. 5). Диоризм к этой задаче: прикладываемая площадь не должна превышать площади квадрата на половине AB, т. е. она не должна быть больше «недостатка» (рис. 6).

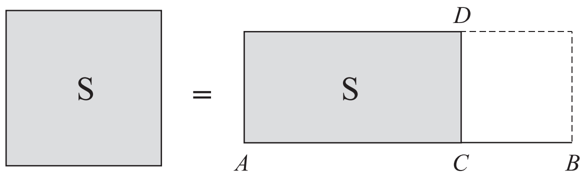


Рис. 5.

Кажется, что именно это ограничение описывает Платон в следующей фразе: *«Если данная площадь такова, что к данной линии она прикладывается с недостатком такой же площади, которая к ней уже приложена»*. По-видимому, под данной линией подразумевается диаметр окружности (ведь окружность должна быть как-то представлена в этом диоризме). Если это так, то диоризм сводится к требованию $S \leq R^2$. Но тогда непонятно, как он соотносится с исходной задачей. Ведь площадь равностороннего треугольника, вписанного в окружность радиуса R, не равна R^2.

Это последнее затруднение можно обойти, предположив, что Сократ у Платона обсуждает задачу вписания в круг не произвольного, но *прямоугольного* треугольника. Все вписанные прямоугольные треугольники опираются на диаметр; среди них наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник, и она как раз равна R^2 (рис. 7).

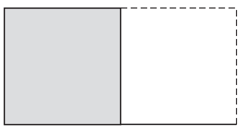


Рис. 6.

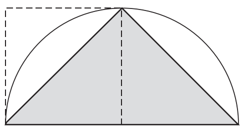


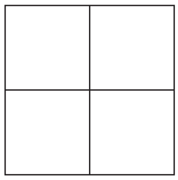
Рис. 7.

Однако последнее предположение выглядит весьма искусственным. Кроме того, остается непонятным, зачем Платон сформулировал такой простой диоризм столь сложным образом. Так что данная реконструкция вряд ли может считаться окончательной.

6. Удвоение квадрата и куба

6.1. Менон, 82a–85b

Сократ. Скажи мне, мальчик, знаешь ли ты, что квадратная площадь (τετράγωνον) такова?



Раб. Знаю.

Сократ. Значит, у этой квадратной площади линии (γραμάς) со всех сторон равны, а числом их четыре?

Раб. Да.

Сократ. А не равны ли между собой и проходящие через центр?

Раб. Равны.

Сократ. А не могла бы площадь быть больше или меньше, чем эта?

Раб. Могла бы, конечно.

Сократ. Так вот если бы эта сторона (πλευρά) была в два фута и та в два фута, то сколько футов было бы здесь всего? Заметь только вот что. Если бы эта сторона была в два фута, а та — в один, разве вся площадь составила бы не два фута?

Раб. Два.

Сократ. А когда та тоже будет равна двум футам, разве не будет у нас дважды по два?

Раб. Будет.

Сократ. Значит, в этом квадрате будет дважды по два фута?

Раб. Верно.

Сократ. А сколько же это будет дважды два фута? Посчитай и скажи!

Раб. Четыре, Сократ.

Сократ. А может быть площадь вдвое большая этой, но все же такая, чтобы у нее, как и у этой, линии со всех сторон были бы равны?

Раб. Может.

Сократ. Сколько же в ней будет футов?

Раб. Восемь.

Сократ. Ну а теперь попробуй-ка сказать, какой длины будет каждая линия. У этой они были по два фута, а у той будут вдвое больше?

Раб. Ясно, Сократ, что вдвое.

Сократ. Видишь, Менон, я ничего ему не внушаю, а только спрашиваю. И вот теперь он думает, будто знает, какие [линии] образуют восьмифутовую площадь. Или, по-твоему, это не так?

Менон. Так.

Сократ. Что же, знает он это?

Менон. Вовсе не знает!

Сократ. Но думает, что вдвое увеличенные?

Менон. Да.

Сократ. Теперь смотри, как он сейчас вспомнит одно за другим все, что следует вспомнить. — А ты скажи мне вот что. По-твоему выходит, что, если удвоить линии, получается удвоенная площадь? Я имею в виду не такую, у которой одна сторона длинная, а другая короткая, а такую, у которой все четыре стороны равны, как у этой, — но только удвоенную, восьмифутовую. Вот и посмотри: тебе все еще кажется, что ее образуют удвоенные [линии]?

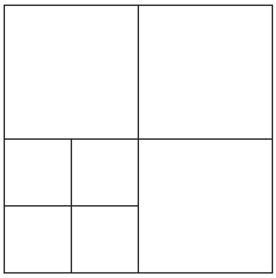
Раб. Да, кажется.

Сократ. А разве не выйдет у нас [линия] вдвое больше этой, если мы, продолжив ее, добавим еще одну точно такую же?

Раб. Выйдет.

Сократ. Значит, по-твоему, если этих больших сторон будет четыре, то получится восьмифутовая площадь?

Раб. Получится.



Сократ. Пририсуем-ка к этой еще три точно такие же учетверенные стороны. Неужели, по-твоему, это и есть восьмифутовая [площадь]?

Раб. Ну конечно.

Сократ. А разве не будет в ней четырех [площадей], каждая из которых равна вот этой, четырехфутовой?

Раб. Будет.

Сократ. Сколько же здесь? Не в четыре ли раза больше, чем в первой?

Раб. Как же иначе?

Сократ. Что же, она одновременно и в четыре, и в два раза больше первой?

Раб. Нет, клянусь Зевсом!

Сократ. Во сколько же раз больше?

Раб. В четыре.

Сократ. Значит, благодаря удвоению сторон получается площадь не в два, а в четыре раза большая?

Раб. Твоя правда.

Сократ. А четырежды четыре — шестнадцать, не так ли?

Раб. Так.

Сократ. Из каких же сторон получается восьмифутовая [площадь]? Ведь из таких вот получилась в четыре раза большая?

Раб. И я так говорю.

Сократ. А из вдвое меньших линий — четырехфутовая?

Раб. Ну да.

Сократ. Ладно. А разве восьмифутовая [площадь] не равна двум таким вот маленьким или половине этой большой?

Раб. Конечно, равна.

Сократ. Значит, линии, из которых она получится, будут меньше этой большой, но больше той маленькой.

Раб. Мне кажется, да.

Сократ. Очень хорошо; как тебе покажется, так и отвечай. Но скажи-ка мне: ведь в этой [линии] — два фута, а в этой — четыре, верно?

Раб. Верно.

Сократ. Значит, линия у восьмифутовой площади непременно должна быть больше двух и меньше четырех футов?

Раб. Непременно.

Сократ. А попробуй сказать, сколько в ней, по-твоему, будет футов?

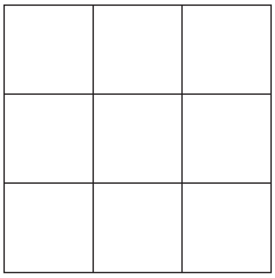
Раб. Три фута.

Сократ. Если она должна иметь три фута, то не следует ли нам прихватить половину вот этой — тогда и выйдет три фута? Здесь два фута, да сюда один; и с другой стороны так же: здесь два фута и сюда один. Вот и получится площадь, о которой ты говоришь. Не так ли?

Раб. Так.

Сократ. Но если у нее одна сторона в три фута и другая тоже, не будет ли во всей площади трижды три фута?

Раб. Очевидно, так.



Сократ. А трижды три фута — это сколько?

Раб. Девять.

Сократ. А в нашей удвоенной сколько должно быть футов, ты знаешь?

Раб. Восемь.

Сократ. Вот и не получилась у нас из трехфутовых [линий] восьмифутовая площадь.

Раб. Не получилась.

Сократ. Но из каких же получится? Попробуй сказать нам точно. И если не хочешь считать, то покажи[1].

Раб. Нет, Сократ, клянусь Зевсом, не знаю.

Сократ. Замечаешь, Менон, до каких пор он дошел уже в припоминании? Сперва он, так же как теперь, не знал, как велика линия у восьмифутовой площади, но думал при этом, что знает, отвечал уверенно, так, словно знает, и ему даже в голову не приходила мысль о каком-нибудь затруднении. А сейчас он понимает, что это ему не под силу, и уж если не знает, то и думает, что не знает.

Менон. Твоя правда.

Сократ. И разве не лучше теперь обстоит у него дело с тем, чего он не знает?

Менон. По-моему, лучше.

Сократ. Так разве мы нанесли ему хоть какой-нибудь вред, запутав его и поразив оцепенением, словно скаты?

Менон. По-моему, ничуть.

Сократ. Значит, судя по всему, мы чем-то ему помогли разобраться, как обстоит дело? Ведь теперь, не зная, он с удовольствием станет искать ответа, а раньше он, беседуя с людьми, нередко мог с легкостью подумать, будто говорит правильно, утверждая, что удвоенная площадь должна иметь линии двойной длины.

Менон. Да, похоже, что так.

Сократ. Что же, по-твоему, он, не зная, но думая, что знает, принялся бы искать или изучать это до того, как запутался, и, поняв, что не знает, захотел узнать?

Менон. По-моему, нет, Сократ.

Сократ. Значит, оцепенение ему на пользу?

Менон. Я думаю.

Сократ. Смотри же, как он выпутается из этого затруднения, ища ответ вместе со мной, причем я буду только задавать вопросы и ничему не стану учить его. Будь начеку и следи, не поймаешь ли меня на том, что я его учу и растолковываю ему что-нибудь, вместо того чтобы спрашивать его мнение. — А ты скажи мне: не это ли у нас четырехфутовая площадь? Понимаешь?

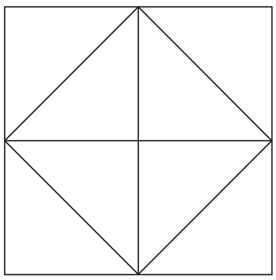
Раб. Это.

Сократ. А другую, равную, мы можем к ней присоединить?

Раб. Конечно.

Сократ. А еще третью, равную каждой из них?

Раб. Конечно.



Сократ. А вот этот угол мы можем заполнить, добавив точно такую же?

Раб. Ну а как же?

Сократ. И тогда получатся у нас четыре равные площади?

Раб. Получатся.

Сократ. Дальше. Во сколько раз все вместе будет больше?

Раб. В четыре.

Сократ. А нам нужно было в два, помнишь?

Раб. Помню.

Сократ. Вот эта линия, проведенная из угла в угол, разве она не делит каждую площадь пополам?

Раб. Делит.

Сократ. Так не получатся у нас четыре равные между собой линии, образующие вот эту площадь?

Раб. Верно.

Сократ. А теперь посмотри, какой величины он будет.

Раб. Не знаю.

Сократ. Но разве каждый из четырех не разделен такой линией пополам? Так или нет?

Раб. Разделен.

Сократ. Сколько же таких половинок будет в этом?

Раб. Четыре.

Сократ. А в этом?

Раб. Две.

Сократ. А во сколько раз четыре больше двух?

Раб. Вдвое.

Сократ. И сколько же футов у нас вышло?

Раб. Восемь футов.

Сократ. А из каких линий?

Раб. Вот из этих.

Сократ. Ведь это — линии, проведенные в четырехфутовых из угла в угол?

Раб. Ну да.

Сократ. Люди ученые называют такую линию диагональю (διαμέτρον). Так что если ей имя — диагональ, то ты, Менонов раб, утверждаешь, что эти диагонали образуют нашу удвоенную площадь.

Раб. Так оно и есть, Сократ.

---

[1] Здесь осуществляется переход от подбора стороны двойного квадрата к ее геометрическому построению.

6.2. Политик, 266ab

Сократ мл. Но каким образом разделить нам эти два [рода][1]?

Чужеземец. А таким, как пристало делить тебе и Теэтету, коль скоро вы занимаетесь геометрией.

Сократ мл. Каким же?

Чужеземец. В соответствии с диагональю и затем — с диагональю диагонали.

Сократ мл. Что ты имеешь в виду?

Чужеземец. Природа, которой наделен наш человеческий род, разве иначе проявила себя в ходьбе, чем диагональ, в потенции двухфутовая (ἡ διάμετρος ἡ δυνάμει δίπους)[2]?

Сократ мл. Нет, не иначе.

Чужеземец. Между тем природа всего остального рода опять-таки проявила себя как диагональ, согласно еще одной потенции от нашей потенции (κατὰ δύναμιν αὖ τῆς ἡμετέρας δυνάμεως διάμετρος), что составит дважды два фута[3].

Сократ мл. Как же иначе? Я почти понимаю, что ты хочешь сказать.

---

[1] Речь идет о родах двуногих и четвероногих существ.

[2] *Фут* = *стопа* (πέδος) в геометрии служит *условной* единицей длины и площади. Ср. *Аристотель.* Метафизика (1089a22): «Геометры условно предполагают, что линия имеет длину в одну стопу, хотя она не такова». В «Меноне» (**6.1**) и «Теэтете» (**7.4**) говорится о двухфутовом (δίπους) и четырехфутовом (τετράπους) квадратах.

Слово «δύναμις» в обыденной речи означает «потенцию», способность к осуществлению действия. В геометрии же термин «δύναμις» имеет специфическое значение величины квадрата, построенного на данной стороне. Шутка чужеземца основана на том, что «двухфутовая потенция» сможет быть понята двусмысленно: и как этот двухфутовый квадрат, и как способность к хождению на двух ногах.

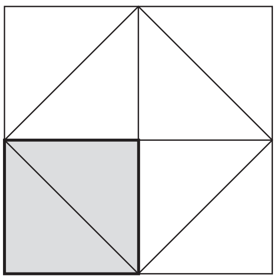


Рис. 8.

[3] Если диагональ однофутового квадрата «взять в потенции», то построенный на ней квадрат будет иметь площадь в два квадратных фута. Если операцию потенцирования повторить еще раз, теперь уже применительно к диагонали «двухфутовой потенции», то новый квадрат окажется «четырехфутовой потенцией» (рис. 8), т. е. способностью к хождению на четырех ногах!

6.3. Сизиф, 388e

Сократ. Разве ты не знаешь, что геометры стремятся с помощью рассуждения установить величину удвоенного куба[1]? Они не выясняют, является ли куб кубом или нет, ибо это им известно.

[1] Задача об удвоении куба является естественным обобщением задачи об удвоении квадрата (см. **6.1**). Но она оказалась существенно более трудной, неразрешимой элементарными средствами (ср. **5.2**, **5.3**).

Происхождение задачи об удвоении куба описывается в следующей легенде: «Во время эпидемии чумы послали афиняне в Дельфы вопросить оракула, что им сделать, чтобы чума прекратилась. Бог ответил им: удвоить алтарь и принести на нем жертвы. А так как алтарь этот был кубом, они взгромоздили на него еще один такой же куб, думая тем исполнить повеление оракула. Когда же чума после этого не прекратилась, отправились они к Платону и спросили, что же теперь делать. Тот отвечал: «Сердится на вас бог за незнание геометрии» — и что следовало подразумевать здесь не простое удвоение, но найти некое среднее по пропорции и произвести удвоение с его помощью; и как только они это сделали, чума тотчас же прекратилась» («Анонимные пролегомены к платоновской философии», 5_{15-24}).

Теон Смирнский (II в. н. э.) в «Изложении математических вещей, полезных при чтении Платона» (2_{3-12}), рассказывая эту же легенду, ссылается на диалог «Платоник» александрийского ученого и поэта Эратосфена (вторая половина III в. до н. э.). Варианты легенды о происхождении делосской задачи излагаются Плутархом: «О надписи Е в Дельфах» (386e); «О гении Сократа» (579bc), «Застольные вопросы» (718ef), «Жизнеописание Марцелла» (14, 9–11).

Вся эта легенда возникла, вероятно, в середине IV в. в платоновской Академии и представляет собой литературную фикцию. Это ясно уже из того, что задача об удвоении куба была поставлена гораздо раньше, поскольку ею занимался Гиппократ Хиосский, который «впервые догадался, что если для двух прямых линий, из которых большая имеет двойное отношение к меньшей, удастся найти две средних пропорциональных в непрерывной пропорции, куб будет удвоен. Тем самым он свел одно затруднение к другому, ничуть не меньшему» (Письмо Эратосфена к Птолемею, приведено у Евтокия, «Комментарий к Книге Архимеда о сфере и цилиндре», 88_{17-23}).

7. Соизмеримость и несоизмеримость

7.1. Гиппий больший, 303b

Сократ. И что мешает, <...>[1] чтобы две величины, порознь невыразимые (ἀρρήτων)[2], в сумме были бы то выразимы (ῥητά), то невыразимы (ἄρρητα)[3]?

[1] Начало отрывка см. **4.11**.

[2] Ср. *Евклид.* Начала (X, опр. 1): «Соизмеримыми величинами (σύμμετρα μεγέθη) называются измеряемые одной и той же мерой, несоизмеримыми (ἀσύμμετρα) же — для которых никакая общая мера не может быть образована».

Схолия к этому определению (т. V, с. 415, 7 Heiberg): «Первыми к исследованию соизмеримости приступили пифагорейцы. <...> Все величины под одной мерой они назвали соизмеримыми, а не подпадающие под одну и ту же меру — несоизмеримыми. Те из них, которые измеримы некой иной, общей мерой, они называли соизмеримыми между собой, а те, что нет, — несоизмеримыми с теми. Принимая условную меру, они сводили все к различным соизмеримостям; и если к различным, то не все могут быть соизмеримыми по отношению к неким. Однако все по отношению к чему-то могут быть выразимыми (ῥητά) и иррациональными (ἄλογα). Поэтому, согласно пифагорейцам, соизмеримость и несоизмеримость существуют по природе, а выразимость и иррациональность — условно. Соизмеримыми и несоизмеримыми бывают трояко в трех протяжениях (κατὰ τὰς τρεῖς διαστάσεις): и линии, и плоскости, и тела».

Платон употребляет термин «невыразимая» (ἄρρητα) для такой величины, которую Евклид называет «иррациональной» (ἄλογα); что касается «выразимых» (ῥητά) величин, то и Платон, и Евклид называют их одинаково.

[3] Если две величины порознь несоизмеримы с некоторой третьей величиной, то их сумма может быть и соизмерима с этой третьей величиной, и несоизмерима с ней.

7.2. Парменид, 140bc

Парменид. Будучи равным, [единое] будет иметь столько же мер, сколько то, чему оно равно.

Аристотель. Да.

Парменид. А будучи больше или меньше тех, с которыми оно соизмеримо, оно про сравнению с меньшими будет содержать больше мер, а по сравнению с большими — меньше.

Аристотель. Да.

Парменид. А по отношению к тем, с которыми оно несоизмеримо, оно не будет иметь ни больше, ни меньше мер.

7.3. Сизиф, 388e

Сократ. Разве ты не знаешь, что характерно для геометрии? Когда геометрам неизвестно о диагонали, диагональ (διάμετρος) это или нет, они вовсе не стремятся к выяснению этого, но узнают, какова ее длина в отношении к сторонам площади (χωρίων), которую она пересекает[1]. Не это ли они о ней исследуют? <…>[2]

---

[1] Под «площадью», очевидно, подразумевается какой-то многоугольник. Это может быть квадрат, прямоугольник с определенным отношением сторон, или какой-нибудь правильный многоугольник. Рассматриваемая диагональ может быть как соизмерима со сторонами, так и несоизмерима с ними. К примеру, диагональ квадрата несоизмерима с его сторонами; напротив, диагональ прямоугольника, стороны которого относятся как 4 : 3, соизмерима с его сторонами.

Заметим здесь, что «несоизмеримость стороны и диагонали» является любимым математическим примером Аристотеля. Однако он ни разу не указывает, что речь идет именно о стороне и диагонали *квадрата.* Конечно, такое предположение выглядит наиболее вероятным; однако в принципе речь здесь может идти и о стороне и диагонали какого-нибудь иного многоугольника, например — весьма интересовавшего пифагорейцев *правильного пятиугольника* (см.: von Fritz, 1945).

А. Аристотель в «Первой аналитике» (41a25–29) говорит, что «несоизмеримость диагонали доказывают тем, что если признать соизмеримость, то нечетное окажется равным четному».

Доказательство для квадрата содержится в приписке, сделанной в конце X книги «Начал» кем-то из комментаторов Евклида. Предположим, что сторона и диагональ квадрата соизмеримы. Пусть их наибольшая общая мера укладывается a раз в диагонали и b раз в стороне. Тогда будет $2b^2 = a^2$. Число a^2 — четное; поэтому a будет четным. Числа a и b взаимно простые, поэтому b, а тем самым и b^2 будет четным. Положив $a = 2c$, получим $b^2 = 2c^2$. Нечетное число оказалось равным четному, что невозможно. Поэтому сделанное предположение является ложным, откуда следует вывод о том, что сторона и диагональ квадрата несоизмеримы.

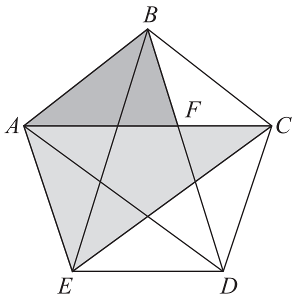


Рис. 9.

Приведем также доказательство для правильного пятиугольника (рис. 9). Треугольники ABF и CEA подобны; поэтому $AC : AE = AF : FB$. Но $FB = FC$ и $AE = ED = AF$, поэтому $AC : AF = AF : FC$. Если перемножить средние и крайние члены этой пропорции, то будет $AF^2 = AC \times FC$. Предположим, что сторона и диагональ правильного пятиугольника соизмеримы. Пусть их наибольшая общая мера укладывается a раз в диагонали и b раз в стороне. Тогда будет $b^2 = a\,(a - b)$. Числа a и b взаимно простые, поэтому они не могут быть четными одновременно. Остаются три варианта. Если a — четное, b — нечетное, то четное $a\,(a - b)$ будет равно нечетному b^2. Если a — нечетное, b — четное, то их разность $(a - b)$ будет нечетной, и нечетное $a(a - b)$ будет равно четному b^2. Если a — нечетное, b — нечетное, то их разность $(a - b)$ будет четной, и четное $a(a - b)$ будет равно нечетному b^2. Во всех трех случаях нечетное число оказалось равным четному, что невозможно. Поэтому сделанное предположение является ложным, откуда следует вывод о том, что сторона и диагональ правильного пятиугольника несоизмеримы.

B. Алгоритм отыскания общей меры двух неравных величин путем их *последовательного взаимного вычитания* (ἀνθυφάιρεσις) приведен Евклидом в «Началах» (X, 1). Пусть даны две величины $A > B$. Будем вычитать B из A, пока не получится остаток $C < B$; будем затем вычитать C из B, пока не получится остаток $D < C$; и т. д. Если на некотором шаге мерка уложится в вымеряемой величине без остатка, то она и будет наибольшей общей мерой двух исходных величин. Если же «для двух неравных величин при постоянном взаимном вычитании меньшей из большей остаток никогда не будет измерять своего предшествующего, то величины будут несоизмеримы» (X, 2).

Античных математических текстов, в которых описывалось бы доказательство несоизмеримости стороны и диагонали квадрата методом последовательного взаимного вычитания, до наших дней не сохранилось. Историками математики был предложен ряд реконструкций такого доказательства; одна из них, сделанная автором настоящего комментария, приведена ниже, в примеч. 5 к **7.7**. Что касается такого же доказательства несоизмеримости стороны и диагонали правильного пятиугольника, оно вытекает непосредственно из пропорции $AC : AF = AF : FC$.

[2] Продолжение отрывка см. **6.3**.

7.4. Теэтет, 147d–148b

Теэтет. Вот Феодор начертил нам нечто о потенциях (περὶ δυνάμεων) и показал, что трехфутовая и пятифутовая[1] по длине несоизмеримы (μήκει οὐ σύμμτροι) с однофутовой. Так, перебирая их одну за другой[2], он дошел до семнадцатифутовой. Тут его что-то остановило[3]. И поскольку таких потенций оказалось бесчисленное множество, мы решили попробовать найти нечто единое, характеризующее все эти потенции.

Сократ. Ну и нашли вы что-нибудь подобное?

Теэтет. Мне кажется, нашли. Взгляни же и ты.

Сократ. Говори, говори.

Теэтет. Все числа мы разделили надвое. Те, которые получается образовать равноравными (ἴσον ἰσάκις), мы назвали, уподобляя их по фигуре квадрату (τῷ τετραγώνῳ), четырехугольными (τετράγωνον) и равносторонними (ἰσόπλευρον)[4].

Сократ. Превосходно.

Теэтет. Другие стоят между этими, например три, пять и всякое другое, которое не получается образовать равноравным, а лишь перемножив большее на меньшее или меньшее на большее. Представив большее и меньшее как стороны продолговатой (προμήκει) фигуры, мы назвали эти другие числа продолговатыми.

Сократ. Прекрасно. А что же дальше?

Теэтет. Те линии, которые квадрируют (τετραγωνίζουσι)[5] равностороннее плоское число, мы назвали длинами (μῆκος); а которые продолговатое — потенциями (δυνάμεις), потому что они соизмеримы с первыми не по длине, а лишь по образуемым площадям (ἐπιπέδοις ἃ δύνανται)[6]. То же и для телесного случая.

---

[1] Трехфутовая и пятифутовая потенции суть квадраты площадью 3 и 5 квадратных футов (ср. **6.2**).

[2] Рассматривается теорема о том, что не существует двух квадратных чисел, одно из которых в N раз больше другого (где N не является квадратным числом). Феодор Киренский еще не владел универсальным доказательством этой теоремы, поскольку из текста следует, что он рассуждал заново для каждого N.

[3] Основанная на *методе четных и нечетных* реконструкция, которую сделал французский историк математики (J. Itard, 1961), объясняет, что именно остановило Феодора при рассмотрении 17-футового квадрата. Ниже излагается предложенная автором настоящего комментария модификация этой реконструкции, главная особенность которой состоит в том, что все рассуждения здесь выполняются *на одном чертеже.*

Сначала рассмотрим вариант, когда N делится на 4: пусть $N = 4N'$. Тогда $a^2 = 4N'b^2$, и тем самым числа a^2 и a будут четными. Положив $a = 2c$, получим $c^2 = N'b^2$. Если N' вновь делится на 4, то будет сделано еще одно понижение $N' = 4N''$, и так далее до тех пор, пока делимость на 4 не прекратится. Пусть N^* — последнее число в последовательности N, N', N'' ... Здесь возможны два случая.

Во-первых, N^* может быть четным числом, состоящим из нечетных половин: $N^* = 2M$, где M нечетно. Тогда $a^2 = 2Mb^2$, и тем самым числа a^2 и a будут четными. Положив $a = 2c$, получим $2c^2 = Mb^2$; но тогда число Mb^2 будет четным, и тем самым числа b^2 и b будут четными. Получилось, что оба числа a и b будут четными, что противоречит требованию, чтобы соответствующая им общая мера была наибольшей.

Во-вторых, N^* может быть нечетным числом. Рассмотрим два квадрата, один из которых в N^* раз больше другого. Предположим, что их стороны соизмеримы; пусть их наибольшая общая мера укладывается a раз в стороне N^*-футового квадрата и b раз в стороне однофутового квадрата. Числа $b \to b^2 \to a^2 \to a$ имеют одинаковую четность. Но a и b не могут быть оба четными: ведь тогда соответствующая общая мера сторон рассматриваемых квадратов не будет наибольшей. Поэтому a и b должны быть оба нечетными.

Дальнейшее рассуждение основано на 8-м предложении книги II «Начал» Евклида: «Если прямая линия как-либо рассечена, то учетверенный прямоугольник, заключенный между всей прямой и одним из отрезков, вместе с квадратом на оставшемся отрезке равен квадрату, надстроенному на всей прямой и упомянутом отрезке, как на одной прямой». Пусть прямая линия AB рассечена в точке C и продолжена на $BD = CB$. Квадрат на AD состоит из четырех квадратов на CB, четырех прямоугольников между AC и CB и одного квадрата на AC (рис. 10). Объединив квадраты и прямоугольники в пары, получим четыре прямоугольника между AB и CB (на чертеже один из таких прямоугольников заштрихован), что доказывает теорему.

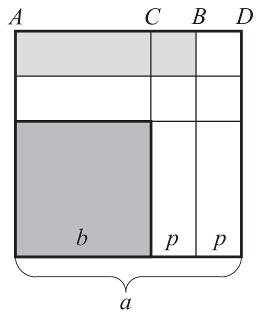


Рис. 10.

В нашем случае будет: $AD = a$ (нечет), $AC = b$ (нечет). Тогда $CD = a - b = 2p$ (чет). Если p — чет, то $b + p$ — нечет, если p — нечет, то $b + p$ — чет. Поэтому прямоугольник между AB и CB, равный $p\,(b + p)$, при данных условиях всегда будет четным.

Сначала рассмотрим случай $N^* = 3$. Пусть квадрат на AD равен трем квадратам на AC. Тогда гномон, являющийся разностью этих квадратов, по площади будет в два раза больше квадрата на AC. Но гномон делится на четыре одинаковых прямоугольных числа между AB и CB. Получается, что *нечетный* квадрат на AC равен *удвоенному* продолговатому числу между AB и CB, что абсурдно.

Тем самым следует заключить, что стороны AD и AC исходных квадратов несоизмеримы.

[Аналогичное рассуждение строится для $N^* = 4k + 3$:
$a^2 = (4k+3)b^2{:}a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = (4k+2)b^2{:}2p(b+p) = (2k+1)b^2$;
в последнем выражении левая часть является четной, а правая нечетной.]

Теперь рассмотрим случай $N^* = 5$. Пусть квадрат на AD равен пяти квадратам на AC. Тогда гномон, являющийся разностью этих квадратов, по площади будет в четыре раза больше квадрата на AC. Но гномон делится на четыре одинаковых *четных* прямоугольных числа между AB и CB. Получается, что *нечетный* квадрат на AC равен *четному* продолговатому числу между AB и CB, что абсурдно. Тем самым следует заключить, что стороны AD и AC исходных квадратов несоизмеримы.

[Аналогичное рассуждение строится для $N^* = 8k + 5$:
$a^2 = (8k+5)b^2{:}a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = (8k+4)b^2{:}p(b+p) = (2k+1)b^2$;
в последнем выражении левая часть является четной, а правая нечетной.]

Теперь рассмотрим случай $N^* = 17$. Пусть квадрат на AD равен 17 квадратам на AC. Тогда гномон, являющийся разностью этих квадратов, по площади будет в 16 раз больше квадрата на AC. Но гномон делится на четыре одинаковых *четных* прямоугольных числа между AB и CB. Получается, что *удвоенный* квадрат на AC равен половине продолговатого числа между AB и CB. Но ничто не запрещает этой половине также быть четной. Противоречия не возникает. Стало быть, для числа 17 «метод четных и нечетных» не работает.

[Аналогичное рассуждение строится для $N = 8k + 1$:
$a^2 = (8k+1)b^2{:}a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 8kb^2{:}p(b+p) = 2kb^2$;
в последнем выражении обе части являются четными. Это же рассуждение не сработало бы и для $N = 9$, но 9 является квадратным числом.]

[4] Ср. *Евклид.* Начала (VII, опр. 19, 20): «*Квадратное* (τετράγωνος) число есть равноравное (ὁ ἰσάκις ἴσος) или объемлемое двумя равными числами. *Кубическое* (κύβος) же есть равным равноравное (ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις) или объемлемое тремя равными числами».

[5] Ср. **5.1**.

[6] Ср. *Евклид.* Начала (X, опр. 2–4): «Линии называются *соизмеримыми в степени* (δυνάμει σύμμετροι), если квадраты на них измеряются одной и той же площадью, *несоизмеримыми* же, если для квадратов на них не может быть образована общая мера площади.

При этих предположениях доказывается, что для заданной линии существует бесчисленное множество линий как соизмеримых, так и несоизмеримых, причем некоторые — только по длине (μήκει), другие же и в степени (δυνάμει). Назвав заданную линию *выразимой* (ῥητή), будем называть соизмеримые с ней, как по длине и в степени, так и только в степени — *выразимыми*, несоизмеримые же с ней — *иррациональными* (ἄλογοι).

Назвав квадрат на заданной линии *выразимым*, будем называть соизмеримые с ним — *выразимыми*, несоизмеримые же с ним — *иррациональными*; и производящие их (αἱ δυνάμεναι αὐτὰ) — *иррациональными*: для квадратов — самые их стороны, для иных прямолинейных фигур — производящие равные им квадраты».

7.5. Законы, 819c–820c

Афинянин. Кроме того, путем измерения длины, ширины и глубины[1] люди освобождаются от некоего присущего всем им от природы смешного и позорного невежества в этой области.

Клиний. О каком невежестве ты говоришь?

Афинянин. Любезный Клиний, я и сам был удивлен, что так поздно узнал о том состоянии, в котором все мы находимся. Мне показалось, что это свойственно не человеку, но скорее каким-то свиньям. И я устыдился не только за самого себя, но и за всех эллинов.

Клиний. Объясни, чужеземец, что ты этим хочешь сказать.

Афинянин. Хорошо, объясню. Впрочем, это выяснится, если я буду тебе задавать вопросы, а ты будешь отвечать, но только кратко. Ты знаешь, что такое длина?

Клиний. Да.

Афинянин. А ширина?

Клиний. Конечно, знаю.

Афинянин. А также и то, что это составляет два, третьим же будет глубина?

Клиний. Разумеется, так.

Афинянин. Не кажется ли тебе, что все они измеряют друг друга (πάντα μετρητὰ πρὸς ἄλληλα)?

Клиний. Да.

Афинянин. А именно что по самой природе возможно измерять длину длиной, ширину — шириной и точно так же и глубину[2]?

Клиний. Вполне.

Афинянин. А если бы это было невозможно ни полностью, ни чуть-чуть, ни так, ни эдак, ты же все считал таковым, — в какое положение ты бы тогда попал?

Клиний. Ясно, что в незавидное.

Афинянин. Так что же, длина и ширина соотносятся с глубиной, или же ширина и длина соотносятся друг с другом? Разве все мы, эллины, не полагаем, что они способны измерять друг друга[3]?

Клиний. Да, именно так мы полагаем.

Афинянин. И вот если снова окажется, что это никоим образом невозможно, между тем как, повторяю, все мы, эллины, полагаем, что это возможно, то разве это не достаточная причина, чтобы устыдиться за всех них? Разве не стоит сказать им: «Лучшие из эллинов, это и есть одна из тех вещей, не знать которые, как мы сказали, позорно; впрочем, такое знание, коль скоро оно необходимо, еще не есть что-то особенно прекрасное».

Клиний. Да, это так.

Афинянин. Кроме этого есть и другие родственные этим вещи, в отношении которых у нас возникает опять-таки много заблуждений, сродных первым.

Клиний. Какие же это вещи?

Афинянин. Это причины, по которым, согласно природе, возникают измеримость и неизмеримость одного с другим (μετρητῶν τε καὶ ἀμέτρων πρὸς ἄλληλα)[4]. Необходимо иметь их в виду и различать, иначе человек будет совсем никчемным. Надо постоянно указывать на это друг другу. Таким образом люди проводили бы время гораздо приятнее, чем старики при игре в шашки: ведь старикам прилично, состязаясь в этой игре, коротать свое время.

[1] Ср. *Аристотель*. Метафизика (1020a11–12): «...из величин непрерывная в одном [протяжении] есть длина, в двух — ширина, в трех — глубина». Стало быть, «ширина» и «глубина» здесь — это не второе и третье измерения, но то, что мы называем площадью и объемом.

[2] Кажется, что здесь речь идет о соизмеримости и несоизмеримости *однородных* величин, — хотя употребляется не совсем обычная терминология.

[3] Странное место. Как вообще можно говорить о соизмеримости либо несоизмеримости *разнородных* величин, если их нельзя даже сравнивать между собой? Может быть, Платон здесь что-то напутал?.

[4] Эти причины изучаются в общей теории делимости.

7.6. Государство, 534d

(*Сократ.*) А своим детям — правда, пока что ты их растишь и воспитываешь лишь мысленно, — если тебе придется растить их на самом деле, ты ведь не позволил бы, пока они бессловесны, как линии (ἀλόγους ὄντας ὥσπερ γραμάς)[1], быть в государстве правителями и распоряжаться важнейшими делами?

[1] Игра слов: «бессловесные» (дети) = «несоизмеримые» (линии) (см. примеч. 2 к **7.1** и примеч. 6 к **7.4**). Ср. с игрой слов в **6.2**.

7.7. Государство, 546bc

(*Сократ.*)[1] Для божественного потомства существует период, охватываемый совершенным (τέλειος) числом[2]. А для человеческого есть первое [число], в котором возрастание мощное (δυνάμεναι) и владычествующее (δυναστευόμεναι)[3], содержащее три интервала и четыре предела (уподобление и неуподобление, рост и убыль), делает все согласующимся и выразимым (ῥητά) через другое. Основание, увеличенное на свою треть и сопряженное с пятеркой, дает две гармонии в тройном возрастании[4]: одну равноравную, сто раз по столько же, а другую с той же длиной, но продолговатую: сто раз берется число выразимых (ῥητῶν) диагоналей пятерки, с недостатком единицы каждая[5], невыразимых (ἀρρήτων) же двойки, и они сто раз берутся кубом тройки. Все в целом это число геометрическое, и оно имеет решающее значение для лучшего или худшего качества рождений.

---

[1] Этот отрывок, посвященный так называемому «брачному числу Платона» — один из самых темных в «математическом платоноведении». Истолковать его и вычислить «брачное число» пытались и в античности (до нас дошли комментарии Плутарха в сочинении «Об Исиде и Осирисе», Аристида Квинтилиана в трактате «О музыке», Прокла в «Комментарии к “Государству” Платона»), и в новое время. Краткий обзор предложенных толкований см. (Паев, 1987: 14–25). Мы воздерживаемся здесь от перечисления предложенных трактовок и их детальной оценки. На наш взгляд, почти все они являются в высшей степени произвольными построениями, и установить их соответствие какой бы то ни было логически обоснованной истине не представляется возможным.

[2] Ср. *Евклид.* Начала (VII, опр. 23): «Совершенное число (τέλειος ἀριθμός) есть равное [всем] своим частям». Здесь части суть делители, меньшие самого числа (ср. примеч. 2 к **3.4**). В «Началах» Евклида (IX, 36) доказывается, что если число $p = 2n + 1 - 1$ является простым, то число $2^n p$ является совершенным. Первые по порядку совершенные числа: 6, 28, 496, 8128, 130 816...

[3] Можно ли считать, что здесь речь идет о второй и третьей степени, как это делали некоторые комментаторы? Во всем корпусе античных математических текстов такое словоупотребление для третьей степени нигде больше не зафиксировано.

[4] «Гармония в тройном возрастании» — это скорее всего непрерывная пропорция из четырех членов. Ср. выше: «три интервала и четыре предела».

[5] «Выразимая диагональ пятерки, с недостатком единицы» — имеется в виду соотношение $7^2 = 2 \cdot 5^2 - 1$. Неопифагореец Теон Смирнский (начало II века н. э.) в «Изложении математических принципов, полезных при чтении Платона» (42_{10}–44_{17}) комментирует это выражение так:

«Подобно тому как числа потенциально имеют отношения треугольные, четырехугольные, пятиугольные и соответствующие прочим фигурам, так мы могли бы найти сторонние и диагональные отношения (πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς λόγιυς), обнаруживающиеся у чисел в соответствии с семенными отношениями (σπερματικοὺς λόγους), ибо по ним упорядочиваются фигуры. А так как над всеми фигурами согласно наивысшему и семенному отношению начальствует единица, то и отношение диагонали к стороне отыскивается в единице. Возьмем две единицы; положим, что одна из них есть диагональ, другая же — сторона, ибо единица, будучи началом всех вещей, потенциально должна быть и стороной и диагональю. И пусть к стороне прибавляется диагональ, а к диагонали две стороны, ибо сколько дважды дает в квадрате сторона, столько один раз диагональ. Теперь большее становится диагональю, а меньшее стороной. При первой стороне и диагонали квадрат единицы-диагонали на одну единицу меньше, чем дважды взятый квадрат единицы-стороны; ведь единицы находятся в равенстве, и единое на одну единицу меньше, чем двойное. Прибавим к стороне диагональ, т. е. к единице единицу; итак, сторона будет 2 единицы; к диагонали же прибавим две стороны, т. е. к единице две единицы; диагональ будет 3 единицы. Квадрат стороны будет 4, а квадрат диагонали будет 9; и 9 на единицу больше, чем дважды взятое 4. Снова прибавляем к стороне 2 диагональ 3; сторона будет 5; а к диагонали 3 две стороны, т. е. два раза по 2; диагональ будет 7. Квадрат стороны будет 25, а квадрат диагонали будет 49; и 49 на единицу меньше, чем двукратно взятое 25. Снова к стороне прибавь диагональ 7; будет 12; к диагонали 7 прибавь дважды взятую сторону 5; будет 17. И квадрат 17 на единицу полнее, чем двукратно взятый квадрат от 12. И от дальнейшего прибавления, происходящего таким образом, будет происходить подобная же смена: двукратно взятый квадрат стороны то на единицу меньше, то на единицу больше, чем квадрат диагонали; при этом стороны и диагонали рациональны.»

Этот же алгоритм для вычисления последовательности «сторонних и диагональных чисел» описывают Ямвлих (ок. 242–327 н. э.) во «Введении в Никомахову Арифметику» (91_3–93_6) и Прокл (410–485 н. э.) во II книге «Комментария к “Государству” Платона» (24_{16}–25_{13}, 27_1–29_4), причем последний приписывает открытие этого алгоритма пифагорейцам (27_{1--22}):

«Поскольку у рациональной стороны не может быть рациональной диагонали (ибо не существует двух квадратных чисел, одно из которых в два раза больше другого, и ясно, что эти величины несоизмеримы, и что Эпикур ложно ввел неделимую меру для всех тел, и Ксенократ — неделимую линию для линий), пифагорейцы и Платон стали говорить о рациональной диагонали и рациональной стороне не прямо, но по производимым квадратам, где диагональ имеет двойное отношение [к стороне], то меньшее на единицу, то большее на единицу: большее как 9 к 4, меньшее как 49 к 25. Пифагорейцы предложили элегантную теорему о диагоналях и сторонах, согласно которой диагональ с присоединением стороны, для которой она является диагональю, становится стороной, а сторона, сложенная сама с собой, с присоединением диагонали становится диагональю. И это доказано на чертеже во второй книге «Начал». Если прямая линия рассечена пополам и к ней по прямой приставлена какая-нибудь другая прямая, то квадрат на всей прямой с приставленной и квадрат на приставленной вдвое больше квадрата на половине и квадрата, надстроенного на половине и приставленной как на одной прямой.»

Вопрос о том, как пифагорейцы могли прийти к своему алгоритму, неоднократно обсуждался историками математики. Наиболее вероятным здесь представляется ход рассуждения, связанный с попытками найти общую меру стороны и диагонали квадрата с помощью «алгоритма Евклида» (см. примеч. 1 к **7.3**, п. **B**). Ниже кратко излагается реконструкция, соединяющая на одном чертеже доказательство «элегантной теоремы» с доказательством несоизмеримости сторон двухфутового и однофутового квадратов.

Предложение II. 10 «Начал» Евклида, на которое ссылается Прокл, можно доказать разрезанием квадрата на части (рис. 11) и перегруппировкой частей. А именно,

$$a^2 + (a+2b)^2 = a^2 + (a^2 + 4b^2 + 4ab) = 2a^2 + 4b^2 + 4ab, \qquad (II.8)$$

$$2b^2 + 2(a+b)^2 = 2b^2 + 2(a^2 + b^2 + 2ab) = 2a^2 + 4b^2 + 4ab, \qquad (II.4)$$

откуда следует «элегантная теорема»

$$a^2 + (a+2b)^2 = 2b^2 + 2(a+b)^2,$$

которое можно преобразовать к виду

$$(a+2b)^2 - 2(a+b)^2 = 2b^2 - a^2.$$

Пусть длины отрезков a и b выражены диагональным и сторонним числами некоторого шага. Тогда длины $(a + 2b)$ и $(a + b)$ будут выражаться диагональным и сторонним числами следующего шага. И поскольку разность удвоенного квадрата стороннего числа и квадрата диагонального числа равна 1 в первой паре [1, 1], она будет равна ± 1 и во всех следующих парах (ср. рассуждения о методе математической индукции в примеч. к **9.1**).

Чтобы доказать на этом же чертеже несоизмеримость сторон двухфутового и однофутового квадратов, возьмем a и b такими, чтобы квадрат на стороне $D =$

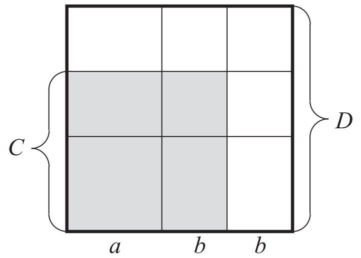


Рис. 11.

$a+2b$ был двухфутовым, а квадрат на стороне $S=a+b$ был однофутовым. В процессе последовательного взаимного вычитания сторон D и S будет $D-S=b$, $S-b=a$. Однофутовый квадрат на S равен однофутовому гномону, образованному разностью двухфутового квадрата на D и однофутового квадрата S. Тем самым

$$a^2+b^2+2ab=3b^2+2ab,$$

откуда следует, что $a^2=2b^2$. Но b и a — это первый и второй остатки, возникшие при последовательном взаимном вычитании сторон D и S. Воспроизвелось начальное отношение квадратов, поэтому процедура последовательного взаимного вычитания не может быть завершена. Отсюда следует заключить, что стороны D и S несоизмеримы между собой.

Зададимся вопросом, почему Теон говорит, что *«единица, будучи началом всего, потенциально должна быть и стороной и диагональю»*, словно равенство между стороной и диагональю в начальной паре является не приближенным, но точным? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим рекурсивный процесс, на первом шаге которого в равнобедренный прямоугольный треугольник «вписываются» три одинаковых треугольника такой же формы (рис. 12), на следующих шагах эта же процедура воспроизводится вновь.

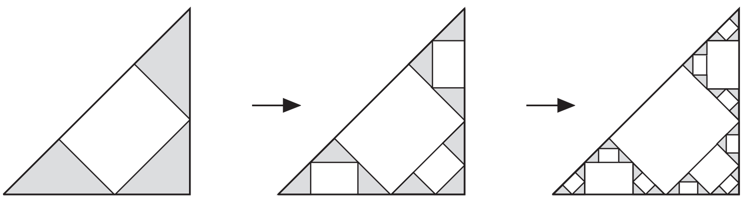


Рис. 12.

Согласно нашей гипотезе, открывшие эту цепочку построений пифагорейцы мыслили ее *завершающейся в бесконечности разбиением исходного треугольника на бесконечно малые неделимые первотреугольники.* Стороны этих первотреугольников являются *неделимыми линиями, не имеющими частей.* (Аристотель замечает в «Метафизике» (992a20): «Платон... началом линии часто называл неделимые линии (ἄτομοι γραμμαί)»). Они не могут быть подведены под отношение «больше-меньше», — поэтому все они оказываются арифметически равными.

Рассмотрим обратный процесс, в котором первотреугольники складываются в агломерации большей величины. Три первотреугольника складываются в аг-

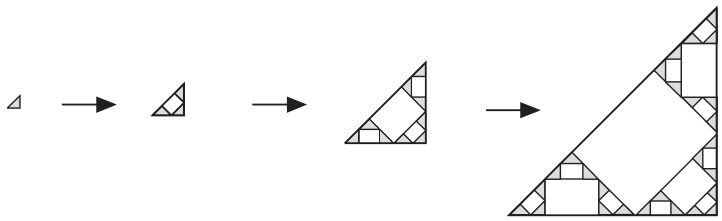


Рис. 13.

ломерацию первого порядка; три агломерации первого порядка — в агломерацию второго порядка, и т. д. (рис. 13). Длины катетов-сторон и гипотенуз-диагоналей в возникающих агломерациях вычисляются с помощью пифагорейского алгоритма. Чтобы составить конечный треугольник из бесконечно малых элементов, нужно совершить бесконечное число шагов «вверх». В результате *«иррациональное отношение» стороны и диагонали оказывается представленным парой актуально бесконечных чисел.*

8. Пропорция

8.1. Горгий, 465bc

Сократ. Чтобы обойтись без долгих речей, я выражусь наподобие того, как это делают геометры (и надеюсь, ты сможешь за мною уследить): как косметика относится к гимнастике, так софистика относится к законодательству, и как кулинария — к врачеванию, так красноречие — к правосудию[1].

---

[1] Пропорциональность четырех чисел определялась в арифметике следующим образом (Евклид. «Начала», VII, опр. 21): «Пропорциональные (ἀνάλογον) числа таковы, что первое со вторым и второе с четвертым являются либо равными, либо кратными, либо одной и той же частью, либо одними и теми же частями». Это же определение приложимо и к соизмеримым величинам. Однако для несоизмеримых величин оно не работает.

О теории пропорциональности величин, которой пользовались геометры конца V — начала IV в. до н. э., сохранились лишь фрагментарные свидетельства. Аристотель в «Топике» (158b29–35) пишет: «И в математических науках кое-что не может быть легко изображено из-за упущения в определении, например то, что при рассечении плоскости (ἐπίπεδον) вдоль ее стороны подобно (ὁμοίως) разделятся линия и площадь. Если же привести определение, сказанное сразу станет очевидным; а именно, площади и линии имеют одинаковое взаимное уничтожение (ἀνταναίρεσιν). А это и есть определение одного и того же отношения (τοῦ αὐτοῦ λόγου)».

Александр Афродисийский в «Комментарии к Топике» (545_{17}) говорит, что термин ἀνταναίρεσις означает то же, что и ἀνθυφαίρεσις — последовательное взаимное отнятие (см. примеч. 1 к **7.3**). «Антифайретическое» определение равенства отношений звучит так: «Четыре величины, первая ко второй и третья к четвертой, имеют одно и то же отношение, если при последовательном взаимном отнятии подходящие частные в обеих парах равны на каждом шаге».

Аристотель называет «плоскостью» — параллелограмм, «подобным» разделением — разделение в одном и том же отношении. Поэтому упомянутая им теорема может быть переформулирована так: «если параллелограмм рассечен прямой линией, параллельной одной из его сторон, то отношение оснований $a : b$ равно отношению площадей $A : B$» (рис. 14).

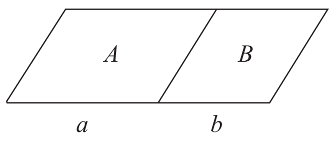


Рис. 14.

Ее доказательство на основе приведенного определения является элементарным. В самом деле, сколько раз основание b уложится в основании a, столько же раз площадь B уложится в площади A. И сколько раз остаток основания c уложится в b, столько же раз остаток площади C уложится в площади B. И т. д.

8.2. Государство, 509d, 511de, 534a

(*Сократ.*) Для сравнения возьми линию (γραμμήν), разделенную на два неравных отрезка (τμήματα)[1]. Каждый такой отрезок, т. е. область зримого и область умопостигаемого, раздели теперь в одном и том же отношении (ἀνὰ τὸν αὐτὸν λόγον). <...>

С указанными четырьмя отрезками соотнеси те четыре состояния, что возникают в душе: удели высшую ступень мышлению (νόησιν), вторую — рассудку (διάνοιαν), третье место — вере (πίστιν), а последнее — уподоблению (εἰκασίαν); и расположи их согласно пропорции (αὐτὰ ἀνὰ λόγον), считая, что, насколько то или иное состояние причастно истине, настолько же оно причастно и достоверности. <...>

Нас удовлетворят, как и раньше, следующие названия: первый раздел — знание (ἐπιστήμην), второй — рассудок, третий — вера, четвертый — уподобление. Оба последних, взятые вместе, составляют мнение (δόξαν), оба первых — мышление (νόησιν)[2]. Мнение имеет дело со становлением, мышление — с сущностью. И сущность относится к становлению как мышление к мнению. А как мышление относится к мнению, так знание к вере, а рассудок к уподоблению[3].

---

[1] У Евклида линия (γραμμή) всегда мыслится ограниченной (т. е. тем, что мы называем отрезком); отрезком же (τμῆμα) он называет часть такой ограниченной линии. (Рассуждения Аристотеля о понятии неограниченной линии см. в примеч. 2 к **13.2**.)

[2] Выше мышлением называлась только самая верхняя ступень. Теперь же эта верхняя ступень названа знанием, а слово «мышление» отнесено ко всем состояниям души, относящимся к умопостигаемым сущностям: как к знанию, так и к рассудку.

[3] Исходным построением задана пропорция $a : b = c : d$ {знание относится к рассудку, как вера к уподоблению}. Тем самым $a : c = b : d = (a + b) : (c + d)$ {знание относится к вере, как рассудок к уподоблению и как мышление к мнению} (рис. 15).

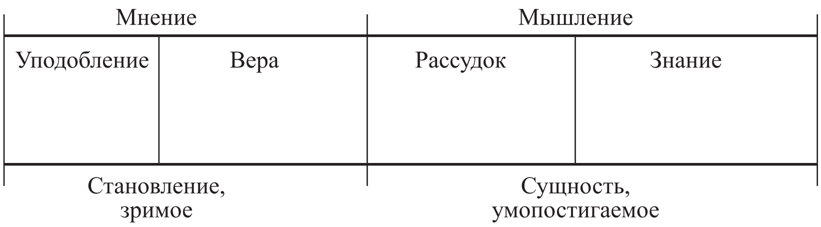


Рис. 15.

8.3. Политик, 257ab

Сократ. Я весьма благодарен тебе, Феодор[1], за то, что ты познакомил меня с Теэтетом и с чужеземцем.

Феодор. Быть может, Сократ, ты скоро будешь мне благодарен втройне, когда они изобразят тебе политика и философа[2].

Сократ. Пусть будет так. Но скажем ли мы, дорогой Феодор, что слышали это от первого мастера в вычислениях и геометрии?

Феодор. Что ты хочешь этим сказать, Сократ?

Сократ. Ты одинаково оценил этих мужей, а между тем по своему достоинству они дальше отстоят один от другого, чем по пропорции (κατὰ ἀναλογίαν)[3], которую дает ваше искусство.

Феодор. Клянусь нашим богом Аммоном, ты удачно, справедливо и выказав прекрасную память, указал мне на ошибку в подсчете.

---

[1] О Феодоре Киренском см. **1.8**, **7.4**.

[2] Втройне — за софиста (о котором шла речь в диалоге «Софист»), политика и философа.

[3] Речь идет о непрерывной, или геометрической пропорции «философ так относится к политику, как политик относится к софисту». Сократ обращает внимание Феодора на то, что философ отстоит от политика в большем отношении, нежели политик от софиста.

8.4. Государство, 587с–588а

(*Сократ.*) Существуют, как видно, три вида удовольствий: один из них — подлинный, два — ложных[1]. Тиран, избегая закона и разума, перешел в запредельную область ложных удовольствий. Там он и живет, и телохранителями ему служат какие-то рабские удовольствия.

Во сколько раз умалились его удовольствия, не так-то легко сказать, разве что вот как...

(*Главкон.*) Как?

(*Сократ.*) После олигархического человека тиран стоит на третьем месте, а посредине между ними будет находиться демократ.

(*Главкон.*) Да.

(*Сократ.*) И сравнительно с подлинным удовольствием у тирана, считая от олигарха, получится уже третье призрачное его подобие, если верно сказанное нами раньше.

(*Главкон.*) Да, это так.

(*Сократ.*) Между тем человек олигархический и сам-то стоит на третьем месте от человека царственного, если мы будем считать последнего тождественным человеку аристократическому.

(*Главкон.*) Да, на третьем[2].

(*Сократ.*) Значит, трижды три раза — вот во сколько раз меньше, чем подлинное, удовольствие тирана[3].

(*Главкон.*) По-видимому.

(*Сократ.*) Значит, размер удовольствия тирана, этого призрачного подобия удовольствия, можно было бы выразить плоскостью[4].

(*Главкон.*) Верно.

(*Сократ.*) А если взять вторую и затем третью степень (κατὰ δὲ δύναμιν καὶ τρίτην αὔξην)[5], станет ясно, каким будет расстояние, отделяющее тирана.

(*Главкон.*) По крайней мере ясно тому, кто умеет вычислять.

(*Сократ.*) Если же кто в обратном порядке станет определять, насколько отстоит царь от тирана в смысле подлинности удовольствия, то, доведя умножение до конца, он найдет, что царь живет в семьсот двадцать девять раз приятнее, а тиран во столько же раз тягостнее[6].

(*Главкон.*) Ты сделал поразительное вычисление! Вот как велика разница между этими двумя людьми, т. е. между человеком справедливым и несправедливым, в отношении к удовольствию и страданию[7].

---

[1] Три вида удовольствий: корыстолюбие, честолюбие и любовь к мудрости (Государство, 580d–583b).

[2] Ступени между тиранией и аристократией:
тирания — демократия — **олигархия** — тимократия — **аристократия**.

[3] Утверждается, что удовольствие аристократа в три раза больше удовольствия олигарха; а удовольствие олигарха в три раза больше удовольствия тирана. Тем самым удовольствие аристократа в $3^2 = 9$ раз больше удовольствия тирана.

[4] То есть плоским числом; ср. **2.14**.

[5] Почему надо брать вторую и третью степень, из текста не слишком понятно.

[6] $9^3 = 729$.

[7] Продолжение отрывка см. **12.6**.

8.5. Законы, 757bc

Афинянин. Существуют два равенства; они хоть и одноименны, но на деле во многом чуть ли не противоположны между собой[1]. Первому из них может отвести почетное место всякое государство и всякий законодатель, руководя его распределением с помощью жребия: таково равенство меры, веса, числа. Но любому человеку нелегко усмотреть самое истинное и наилучшее равенство. Ведь оно — приговор Зевса. Людям его уделяется всегда немного, но когда оно уделено государству или частным лицам, оно создает все блага. Большему оно уделяет больше, меньшему — меньше, каждому даря отмеренное по его природе[2]. И самый большой почет воздает оно всегда самым добродетельным, противоположное же оно соответственно (κατὰ λόγον) уделяет тем, кто в добродетели и образованности им противоположен.

[1] Ср. *Аристотель.* Политика (1301b29–35): «Равенство бывает двоякое: по числу и по достоинству. Под равенством по числу я разумею тождество и равенство количества или величины, под равенством по достоинству — равенство отношений. Например, по числу одинаково три больше двух, два больше одного, а по отношению одинаково четыре больше двух, два больше одного: ведь равными частями являются два от четырех и один от двух, потому что и там и там — половина».

[2] Учение Платона о справедливом распределении развивает Аристотель в «Никомаховой этике» (1131a18–1132b9) и в «Большой этике» (1193b37–1194a8): «Если справедливое — это равное, то пропорционально равное (ἀνάλογον ἴσον) также будет справедливым. Пропорция предполагает самое меньшее четыре [члена]: А к В как Г к Δ. Например, есть пропорция в том, что имеющий много вносит много, а имеющий мало вносит мало; и равным образом в том, что потрудившийся много получает много, а потрудившийся мало получает мало. Как потрудившийся относится к нетрудившемуся, так многое относится к малому. А потрудившийся относится ко многому, как нетрудившийся — к малому. И Платон в «Государстве» явно применяет эту справедливую пропорцию».

8.6. Горгий, 508a

Сократ. Мудрецы учат, Калликл, что небо и землю, богов и людей объединяют общение, дружба, порядочность, воздержанность и высшая справедливость; по этой причине они и зовут нашу Вселенную космосом[1], а не беспорядком, друг мой, и не бесчинством. Ты же, мне кажется, этого в расчет нисколько не принимаешь; несмотря на всю свою мудрость, ты не замечаешь, как много значит и меж богов, и меж людей равенство — я имею в виду геометрическое равенство (ἡ ἰσότης ἡ γεωμετρική)[2], — и думаешь, будто надо стремиться к превосходству над остальными. Это оттого, что ты пренебрегаешь геометрией.

[1] Ср. «Мнения философов» (II 1, 1): «Пифагор первый назвал Вселенную космосом по присущему ей порядку (ἐν αὐτῶι τάξεως)».

[2] Равенство отношений, заключенное в пропорции (ср. **8.5**).

8.7. Парменид, 154bd

Парменид. Равные, будучи прибавлены к неравным — времени или чему-то иному, — всегда оставляют их разнящимися настолько, насколько они разнились вначале. <. . . > Но посмотри-ка: если к большему и меньшему времени мы прибавим равное время, то будет ли большее время разниться с меньшим на равную часть (ἆρα τῷ ἴσῳ μορίῳ) или на меньшую?

Аристотель. На меньшую[1].

[1] Как следует понимать выражения «разниться» и «разниться на часть» поясним на примере. Возьмем два числа 4 и 3. Большее превосходит меньшее на единицу — и на 1/3 от него. Если к нашим числам прибавить одно и то же число 2, то они окажутся равными 6 и 5. Эти числа разнятся все на ту же единицу — но теперь большее превосходит меньшее на 1/5 от него.

8.8. Тимей, 31b–32c

Тимей. Телесным, а потому видимым и осязаемым — вот каким надлежало быть тому, что рождалось. Однако видимым ничто не может стать без участия огня, а осязаемым — без чего-то твердого (στερεοῦ), твердым же ничто не может стать без земли. По этой причине бог, приступая к составлению тела Вселенной, сотворил его из огня и земли. Однако два члена сами по себе не могут быть хорошо сопряжены без третьего, ибо необходимо чтобы между одним и другим родилась некая объединяющая их связь. Прекраснейшая же из связей такая, которая в наибольшей степени единит себя и связуемое, и задачу эту наилучшим образом выполняет пропорция. Ибо когда из трех чисел — как объемных (ὄγκων), так и второй степени (δυνάμεων)[1] — при любом среднем числе первое так относится к среднему, как среднее к последнему, и обратно, последнее так относится к среднему, как среднее к первому, тогда если среднее становится первым и последним, а последнее и первое оба становятся средними, то все с необходимостью остается согласованным[2], и они во всем порождают друг друга. При этом, если бы телу Вселенной надлежало стать плоскостью, не имеющей глубины, было бы достаточно одного среднего члена для сопряжения его самого с крайними. Однако оно должно было стать твердым по виду (στερεοειδῆ), а твердые [тела] никогда не сопрягаются через один средний член, но всегда через два[3]. Поэтому бог поместил между огнем и землей воду и воздух, причем по возможности в одном и том же отношении, дабы как огонь относился к воздуху, так воздух к воде, и как воздух к воде, так вода к земле[4]. Так он сопряг из, построяя из них небо, видимое и осязаемое. Таким образом и из таких [частей] числом четыре родилось тело космоса, упорядоченное благодаря пропорции.

[1] Необычные названия для телесного и плоского чисел. Рядом в этом же отрывке употребляются общепринятые термины στερεός для телесных чисел и ἐπίπε δος для плоских чисел (ср. примеч. 2 к **2.14**).

[2] Если имеется непрерывная пропорция $A : B = B : C$, то и при обращении $B : A = C : B$.

[3] Ср. *Евклид.* Начала (VIII, 11): «Для двух квадратных чисел существует одно среднее пропорциональное число» [а именно, $a^2 : ab = ab : b^2$]; (VIII, 12): «Для двух кубических чисел существуют два средних пропорциональных числа» [а именно $a^3 : a^2b = a^2b : ab^2 = ab^2 : b^3$].

[4] Платон постулирует здесь непрерывную пропорцию из четырех членов:

огонь : воздух = воздух : вода = вода : земля.

Однако численного представления этой пропорции он не дает. Сконструировать такую пропорцию из чисел вершин, ребер и граней правильных многогранников, являющихся по Платону элементами этих четырех родов (см. раздел 10), не представляется возможным.

9. Математическая индукция

9.1. Парменид, 149ас

Парменид. Нужно, чтобы имелось по меньшей мере два [члена], если быть соприкосновению.

Аристотель. Да.

Парменид. Если же к двум членам присоединится третий, то их будет три, а соприкосновений два.

Аристотель. Да.

Парменид. Таким образом, всегда, когда присоединяется один, прибавляется также одно соприкосновение; и выходит, что соприкосновений одним меньше сравнительно с числом членов соединения. Действительно, насколько первые два члена превысили соприкосновения, т. е. насколько число их больше числа соприкосновений, точно настолько же каждое последующее их число превышает число всех соприкосновений, так как дальше уже одновременно прибавляется единица к числу членов и одно соприкосновение к соприкосновениям.

Аристотель. Правильно.

Парменид. Итак, сколько бы ни было членов, число соприкосновений всегда будет одним меньше[1].

[1] В том, как построено это рассуждение, можно опознать схему математической индукции (см. Acerbi, 1998). При этом сам по себе доказываемый факт является вполне очевидным и не нуждается в столь утонченном доказательстве. Поэтому можно предположить, что Платон воспроизводит здесь способ рассуждений, выработанный для доказательства других, более сложных и неочевидных комбинаторных фактов. Впрочем, в сохранившемся корпусе античных математических текстов таких доказательств не содержится. Отметим, что некое подобие

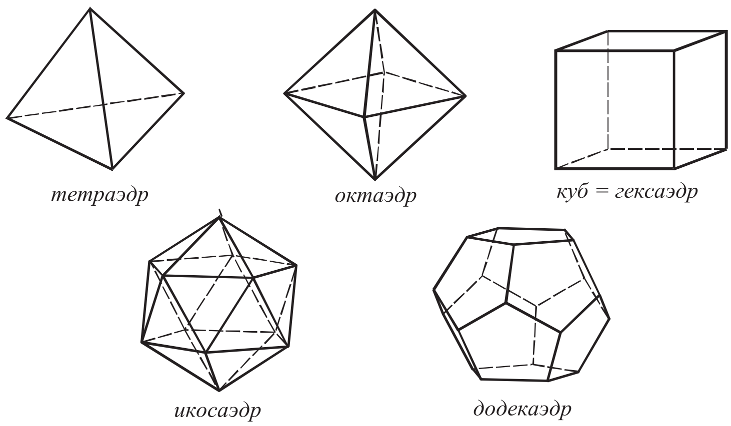
метода математической индукции необходимо использовать в доказательстве того факта, что в алгоритме для вычисления сторонних и диагональных чисел (см. комм. 5 к **7.7**) квадрат диагонального числа отличается от удвоенного квадрата стороннего числа на единицу попеременно то с избытком, то с недостатком.

10. Правильные многогранники

10.1. Послезаконие, 981bc

Афинянин. Надо сказать, что, согласно правдоподобному суждению, есть пять твердых тел (στερεὰ σώματα)[1], лепить из которых всего прекраснее и лучше; весь же остальной род имеет только одну форму (μορφήν). <…> Итак, есть пять тел: здесь надо назвать, во-первых, огонь, во-вторых — воду, в-третьих — воздух, в-четвертых — землю, в-пятых — эфир.

[1] В *схолиях к «Началам» Евклида* (XIII, 1, т. V, с. 654 Heiberg) сказано: «В этой, 13-й книге, описываются так называемые 5 платоновских фигур, которые, однако, Платону не принадлежат. Три из упомянутых фигур — куб, пирамида [= тетраэдр] и додекаэдр — принадлежат пифагорейцам, а октаэдр и икосаэдр — Теэтету. По имени Платона они были названы потому, что он упоминает о них в “Тимее”». Ямвлих в книге «О пифагорейской жизни» (88; 246) приписывает открытие додекаэдра пифагорейцу Гиппасу из Метапонта (начало V в. до н. э.)



	тетраэдр (огонь)	октаэдр (воздух)	куб (земля)	икосаэдр (вода)	додекаэдр (эфир)
вершины	4	6	8	12	20
грани	4	8	6	20	12
ребра	6	12	12	30	30

Рис. 16.

10.2. Федон, 110b

(*Сократ.*) Рассказывают прежде всего, что та Земля, если взглянуть на нее сверху, похожа на сшитый из двенадцати кусков кожи мяч, пестро расписанный разными цветами.

10.3. Тимей, 53c–57d

Тимей. Четыре рода обособились в пространстве еще до того, как пришло время рождаться устрояемому из них телу Вселенной. Ранее они были лишены отношения-разума и меры (ἀλόγως καὶ ἀμέτρως): хотя огонь и вода, земля и воздух являли кое-какие приметы присущей им своеобычности, однако они пребывали всецело в таком состоянии, в котором свойственно находиться всему, чего еще не коснулся бог. Поэтому, приступая к построению космоса, он начал с того, что оформил (διεσχηματίσατο) эти первые посредством видов (εἴδεσι) и чисел. То, что они были приведены богом к наивысшей возможной для них красоте и к наивысшему совершенству из совсем иного состояния, пусть останется для нас преимущественным и незыблемым утверждением; но теперь мне следует попытаться пояснить вам устройство и рождение каждого из четырех родов. Рассказ мой будет непривычен, но, раз вы сроднились с теми путями научения, без которых не обойтись моим речам, вы последуете за мной.

Во-первых, каждому, разумеется, ясно, что огонь и земля, вода и воздух суть тела, а всякое тело по виду имеет глубину[1]. Между тем любая глубина по необходимости должна быть ограничена некоторыми поверхностями; а всякая прямая поверхность состоит из треугольников. Однако все вообще треугольники восходят к двум треугольникам, из которых каждый имеет по одному прямому углу и по два острых[2], но при этом у одного по обе стороны от прямого угла лежат равные углы величиной в одну и ту же долю прямого угла, ограниченные равными сторонами, а у другого — неравные углы, ограниченные неравными сторонами. Здесь-то мы и полагаем начало огня и всех прочих тел, следуя в этом вероятности, соединенной с необходимостью; те же начала, что лежат еще ближе к истоку, ведает бог, а из людей разве что тот, кто друг богу[3]. Теперь следует сказать, каковы те четыре рожденных тела, прекраснейшие из всех, которые не подобны друг другу, однако способны, разрушаясь, друг в друга перерождаться. Если нам удастся попасть в точку, у нас в руках будет истина о рождении земли и огня, а равно и тех, что стоят между ними как средние члены пропорции[4]. Тогда мы никому не уступили бы в том, что нет видимых тел более прекрасных, чем эти, притом каждое из них прекрасно в своем роде. Поэтому надо приложить старания к тому, чтобы привести в соответствие четыре отличающихся красотой рода тел и доказать, что мы достаточно уразумели их природу. Из двух названных раньше треугольников равнобедренный (ἰσοσκελές) получил в удел одну природу, тогда как продолговатый (πρόμηκες) — бесчисленное их множество. Из этого множества нам должно избрать наилучшее, если мы хотим приступить к делу надлежащим образом. Что ж, если кто-нибудь выберет и назовет нечто еще более прекрасное, предназначенное для того, чтобы создавать их, мы подчинимся ему не как неприятелю, но как другу; нам же представляется, что среди множества треугольников есть один, прекраснейший, ради которого мы оставим все прочие, а именно тот, который в соединении с подобным ему образует третий треугольник — равносторонний. Обосновывать это было бы слишком долго; впрочем, если бы кто изобличил нас и доказал обратное, мы охотно признали бы его победителем. Итак, нам приходится отдать предпочтение двум треугольникам как таким, из которых составлено тело огня и прочих тел: один из них равнобедренный, а другой таков, что в нем большая сторона в квадрате троекратно превосходит меньшую[5]. Но мы обязаны более четко определить одну вещь, о которой прежде говорилось неясно. В самом деле, нам казалось, будто все четыре рода могут последовательно перерождаться друг в друга, но такая видимость была неправильной. Ведь четыре рода действительно рождаются из выбранных нами треугольников: три рода слагаются из одного и того же треугольника с неравными сторонами и только четвертый род — из равнобедренного[6]. А значит, не все роды могут разрешаться друг в друга и рождаться один из другого путем соединения большого количества малых в малое количество больших, и обратно, но лишь первые три: ведь коль скоро все они произошли из единого, то при разрушении более крупных из них составится множество малых, принимающих свойственные им фигуры (σχήματα); и, напротив, если разъять много малых на отдельные треугольники, они образуют единое количество однородной массы, из которой возникнет единое большое иного вида. Вот как обстоит дело с их переходом друг в друга. Следующей нашей задачей будет изложить, какой вид (εἶδος) имеет каждое тело и из сочетания каких чисел оно рождается. Начнем с первого вида, состоящего из самых малых частей: его элемент (στοιχεῖον) — треугольник, у которого гипотенуза вдвое длиннее меньшей стороны. Если такие треугольники сдвоить по диагоналям (διάμετρον)[7], и повторить такое действие трижды, притом так, чтобы меньшие стороны и гипотенузы сошлись в одной точке как в своем центре, то из шести треугольников будет рожден один, и он будет равносторонним[8]. Когда же четыре равносторонних треугольника окажутся соединенными, они образуют из трех плоских углов один телесный угол (στερεὰν γωίαν), а именно такой, который занимает место вслед за самым тупым из плоских углов[9]. Завершив построение четырех таких углов, мы получаем первый телесный вид[10], имеющий свойство делить всю описанную около него сферу на равные и подобные части. Второй вид строится из таких же исходных треугольников, соединившихся в восемь равносторонних треугольников и образующих каждый раз из четырех плоских углов по одному телесному; когда таких телесных углов шесть, второе тело получает завершенность[11]. Третий вид образуется из сложения ста двадцати элементов, телесных же углов в нем двенадцать, и каждый из них охвачен пятью равносторонними треугольными плоскостями, так что все тело имеет двадцать граней (βάσεις), являющих собой равносторонние треугольники[12]. На этом порождении и кончилась задача первого элемента. Но равнобедренный треугольник породил четвертую природу, и притом так, что четыре [треугольника], прямые углы которых встречались в одном центре, образовали квадрат[13]; а из сложения шести [квадратов] возникло восемь телесных углов, каждый из которых гармонично охвачен тремя плоскими прямыми углами. Составившееся таким образом тело имело форму (σχῆμα) куба, наделенного шестью квадратными плоскими гранями. В запасе оставался еще пятый [многогранник][14], его бог определил для Вселенной и прибегнул к нему в качестве образца.

Если бы теперь кто-нибудь, тщательно обдумывая все сказанное, задался вопросом, следует ли допустить бесчисленные космосы или ограниченное их число, ему пришлось бы заключить, что вывод относительно неограниченности этого числа позволительно делать разве что тому, кто сам очень ограничен, и притом в вопросах, которые следовало бы знать. Если, однако, поставить иной вопрос — существует ли один космос или их на самом деле пять[15], то здесь, естественно, причин для затруднения было бы куда больше. Что касается нас, то мы, согласно правдоподобным словам и указаниям бога, утверждаем, что существует один космос; но другой, взглянув на вещи иначе, составит себе, пожалуй, иное мнение. Как бы то ни было, оставим этот вопрос и начнем разделять роды, только что рожденные нашим словом, на огонь, землю, воду и воздух. Земле мы, конечно, припишем вид куба: ведь из всех четырех родов наиболее неподвижна и пригодна к образованию тел именно земля, а потому ей необходимо иметь самые устойчивые основания. Между тем не только из наших исходных треугольников равнобедренный, если взять его как основание, по природе устойчивее неравностороннего, но и образующийся из сложения двух равнобедренных треугольников квадрат с необходимостью более устойчив, нежели равносторонний треугольник, причем соотношение это сохраняет силу как для частей, так и для целого. Значит, мы не нарушим правдоподобия, если назначим этот удел земле, а равно и в том случае, если наименее подвижный из остальных видов отведем воде, наиболее подвижный — огню, а средний — воздуху; далее, наименьшее тело — огню, наибольшее — воде, а среднее — воздуху, и, наконец, самое остроугольное тело — огню, следующее за ним — воздуху, а третье — воде. Но из всех вышеназванных тел наиболее подвижно по природе своей и по необходимости то, у которого наименьшее число оснований, ибо оно со всех сторон имеет наиболее режущие ребра и колющие углы, а к тому же оно и самое легкое, коль скоро в его состав входит наименьшее число исходных частей. То тело, которое обладает такими же свойствами, но второго порядка, и место займет второе, а то, которое обладает третьим порядком этих свойств, — третье. Пусть же телесный образ пирамиды (πυραμίδος) и будет, в согласии со справедливым рассуждением и с правдоподобием, элементом и семенем (στοιχεῖον καὶ σπέρμα) огня (πυρός)[16]; второе по рождению тело мы назовем воздухом, третье же — водой. Но при этом мы должны представить себе, что все они до такой степени малы, что единичное [тело] каждого из перечисленных родов но причине своей малости для нас невидимо, и лишь складывающиеся из их множеств массы бросаются нам в глаза. Что же касается их количественных соотношений, их движений и вообще их способностей, то бог привел все это в правильную соразмерность, упорядочивая все тщательно и пропорционально, насколько это допускала позволившая себя переубедить природа необходимости. Исходя из всего того, что было сказано выше об этих четырех родах, дело наиболее правдоподобно можно описать следующим образом. Когда земля встречается с огнем и бывает рассеяна его остротой, она несется, распадаясь либо в самом огне, либо в толще воздуха или воды, если ей придется там оказаться, покуда ее частицы, повстречавшись друг с другом, не соединятся сызнова, чтобы она опять стала землей: ведь она не может принять иную форму. Напротив, вода, дробимая огнем или воздухом, позволяет образоваться одному телу огня и двум воздушным телам, равно как и осколки одной рассеченной части воздуха могут породить из себя два тела огня. Но и наоборот, когда малая толика огня, оказавшись в больших толщах воздуха, воды или земли, подхватывается их движением, сокрушается в борьбе и дробится, два тела огня сплачиваются в единый вид воздуха; или когда воздух претерпевает насилие и разрушение, из двух с половиной его тел оказывается составлен один цельный вид воды. <...>

Таковы причины, определившие собой рождение тел беспримесных и первичных. Но если внутри самих этих видов выявились еще дальнейшие родовые различия, виной этому способ построения обоих элементов. Дело в том, что треугольники первоначально являлись на свет не с единообразными для каждого рода размерами, но то меньшими, то более крупными, и разных по величине треугольников было ровно столько, сколько родов различается ныне внутри видов. Сочетание их с такими же и с иными дало беспредельное многообразие, созерцателем которого надлежит стать любому, кто вознамерится изречь о природе правдоподобное слово.

---

[1] Ср. **8.8**.

[2] По-видимому, в том смысле, что всякий произвольный треугольник можно разделить на два прямоугольных треугольника.

[3] Возможно, что фигура умолчания касается так называемых «семенных логосов» (см. примеч. 5 к **7.7**).

[4] Ср. примеч. 3 к **8.8**.

[5] Квадраты сторон равнобедренного прямоугольного треугольника относятся как 2 : 1 : 1; квадраты сторон «половины» равностороннего треугольника относятся как 4 : 3 : 1. Таким образом, в отношениях сторон в первом случае задействован $\sqrt{2}$, во втором $\sqrt{3}$.

[6] Тетраэдр, октаэдр и икосаэдр составлены из равносторонних треугольников, куб — из квадратов.

[7] Диаметр прямоугольного треугольника = его гипотенуза.

[8] См. рис. 17.

[9] Три плоских угла в 60° составляются в один телесный угол. Мы бы сказали, что сумма этих плоских углов равна развернутому углу. Однако древние греки развернутый угол углом не считали; ведь по Евклиду (Начала, I, опр. 9) «плоский угол есть наклонение друг к другу двух линий, в плоскости касающихся друг друга, но не расположенных по прямой». Выражение «самый тупой из плоских углов» не является логически безукоризненным: множество тупых углов не содержит наибольшего элемента (хотя и имеет верхнюю грань).

[10] Тетраэдр.

[11] Октаэдр.

[12] Икосаэдр.

[13] См. рис. 18.

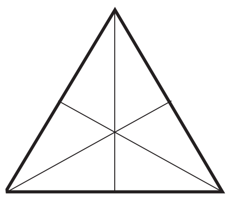


Рис. 17.

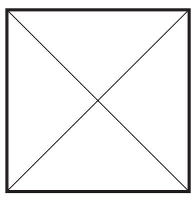


Рис. 18.

[14] Додекаэдр. Ср. **10.1**, **10.2**.

[15] Пять космосов — по числу правильных многогранников.

[16] Игра слов.

11. Теоретическая Гармония

11.1. Тимей, 35b–36b

Тимей. Делить же [демиург] начал следующим образом: прежде всего отнял от целого одну долю, затем удвоенную вторую, третью — полуторную в сравнении со второй и тройную в сравнении с первой, четвертую — двойную в сравнении со второй, пятую — тройную в сравнении с третьей, шестую — восьмикратную в сравнении с первой, а седьмую — больше первой в двадцать семь раз[1]. После этого он стал заполнять образовавшиеся двойные и тройные интервалы (διαστήματα), отсекая от той же смеси все новые доли и помещая их между прежними долями таким образом, чтобы в каждом интервале было по два средних члена, из которых один на одну и ту же часть превышал бы меньший из крайних членов и превышался бы большим, а другой превышал бы меньший крайний член и уступал большему на одинаковое число[2]. Благодаря этим скрепам возникли новые интервалы $3:2$ (ἡμιολίων), $4:3$ (ἐπιτρίτων) и $9:8$ (ἐπογδόων) внутри прежних интервалов[3]. Тогда он заполнил все интервалы $4 : 3$ интервалами $9 : 8$, оставляя от каждого интервала такую часть, чтобы пределы этих оставшихся интервалов всякий раз относились друг к другу численно как 256 к 243[4]. При этом смесь, от которой брались упомянутые доли, была истрачена до конца. $<\ldots>$[5]

---

[1] Строятся две непрерывные пропорции, восходящие от единицы; одна из них идет по степеням двойки ($1 : 2 : 4 : 8$), а другая по степеням тройки ($1 : 3 : 9 : 27$). На языке музыкальных интервалов первой пропорции соответствует восхождение октавами ($2 : 1$), а второй пропорции — восхождение дуодецимами ($3 : 1$). Будучи «перемешанными», члены обоих пропорций дают восходящий ряд чисел

$$1 - 2 - 3 - 4 - 8 - 9 - 27.$$

[2] Между двумя крайними членами интервала A и B вставляются два средних. Среднее гармоническое C таково, что $(C - A) : A = (B - C) : B$; тем самым $C = 2AB\,/\,(A + B)$. Среднее арифметическое D таково, что $D - A = B - D$; тем самым $D = (A + B)/2$. Нетрудно видеть, что для крайних и средних членов имеет место так называемая *музыкальная* пропорция $A : C = D : B$.

[3] Вставка средних в дуодециму приводит к музыкальной пропорции $(\frac{1}{1}) : (\frac{3}{2} = (\frac{2}{1}) : (\frac{3}{1}))$, где вставленные средние суть интервалы октавы $(2:1)$ и квинты $(3:2)$; отношение октавы и квинты равно кварте $(4 : 3)$. Вставка средних в октаву приводит к музыкальной пропорции $(\frac{1}{1}) : (\frac{4}{3}) = (\frac{3}{2}) : (\frac{2}{1})$, где вставленные средние суть интервалы квинты $(3:2)$ и кварты $(4:3)$; отношение квинты и кварты равно целому тону $(9 : 8)$.

[4] Если из кварты $(4 : 3)$ вычесть два целых тона $(9 : 8)$, остатком будет малый полутон, или леймма $(256:243)$. Тем самым кварта представляется в виде $(\frac{4}{3}) = (\frac{9}{8}) \cdot (\frac{9}{8}) \cdot (\frac{256}{243})$.

Описанная Платоном система музыкальных интервалов называется *диатонической гаммой.* Эта гармоническая система была установлена пифагорейцами. Настройка в этой системе производится по одним только основным консонансным интервалам. Основная теоретическая проблема, связанная с этой системой, заключается в том, что шесть тонов в точности не равны октаве. Их разность, так называемая пифагорейская *комма*, равна ($3^{12} : 2^{19}$). (Эта разность может быть представлена так же как разность между 12 квинтами и 7 октавами, или как разность между большим и малым полутоном).

[5] Непосредственно дальше следует отрывок **12.5**, в котором речь идет о «гармонии сфер». Построенной системе октав и дуодецим по Платону соответствуют обращения семи небесных тел; эти обращения сопряжены друг с другом диатоническими гармониями. К примеру, обращениям Меркурия и Венеры соответствует кварта 4 : 3, обращениям Юпитера и Марса соответствует целый тон 9 : 8 (рис. 19). Вся эта система является чисто спекулятивной и не соотносится ни с какими наблюдаемыми данными.

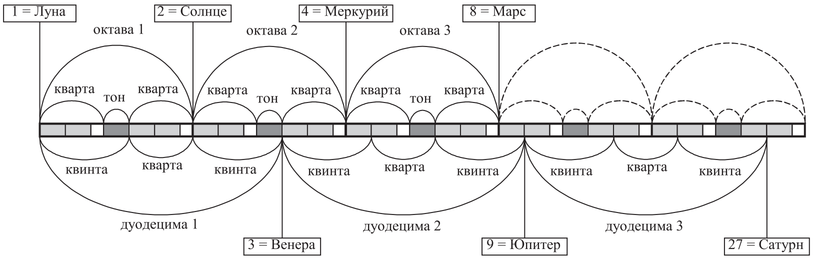


Рис. 19.

11.2. Послезаконие, 990e–991b

Но что действительно божественно и удивительно для того, кто способен видеть и размышлять, так это обращающаяся вокруг удвоения способность (δυνάμεως), а также противоположная ей во всякой пропорции, что отразилось во всех видах и родах по их природе.

Первое удвоение численно идет в отношении единицы к двойке (ἓν πρὸς δύο κατὰ λόγον); затем удвоение происходит при взятии второй степени (κατὰ δύναμιν); при переходе к телесному (τὸ στερεόν) и осязаемому вновь происходит удвоение, причем здесь от единицы восходят к восьми[1].

Второе удвоение идет к середине; и одно среднее будет равным образом больше меньшего крайнего члена и меньше большего; другое же превосходит один из крайних членов такой же частью, какой превосходится другим[2] (так в середину отношения шести к двенадцати встают полуторное и эпитритное отношения)[3]. Исходя из этих и обращаясь от середины к обоим краям[4], эта способность научила людей согласованности и соразмерности ради ритмических игр и гармонии и даровала это блаженному хороводу Муз.

---

[1] Восходящая непрерывная пропорция степеней двойки: 1 : 2 : 4 : 8. Первое удвоение — линейное, второе — плоскостное, третье — телесное.

[2] Арифметическое и гармоническое среднее (см. примеч. 2 к **11.1**).

[3] Среднее арифметическое между 12 и 6 равно 9, что составляет $^3/_2$ от 6; среднее гармоническое между 12 и 6 равно 8, что составляет $^4/_3$ от 6. Эта четверка чисел дает музыкальную пропорцию для октавы $6 : 8 = 9 : 12$.

[4] Согласно Б. Л. Ван-дер-Вардену, речь идет о вставке средних внутрь квинты и кварты. В результате образуются музыкальные пропорции $\left(\frac{1}{1}\right) : \left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{5}{4}\right) : \left(\frac{3}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{1}\right) : \left(\frac{8}{7}\right) = \left(\frac{7}{6}\right) : \left(\frac{4}{3}\right)$. Возникающими при этом интервалами пользовался Архит Тарентский в построении своих тетрахордов (47 A16 DK).

11.3. Государство, 530d–531c

(*Сократ.*) Пожалуй, как глаза наши устремлены к астрономии, так уши — к движениям гармоний; эти знания — словно родные сестры, по крайней мере так утверждают пифагорейцы, и мы с тобой, Главкон, согласимся с ними. Поступим мы так?

(*Главкон.*) Непременно.

(*Сократ.*) Предмет этот сложный, поэтому мы расспросим их, как они все это объясняют, может быть, они и еще кое-что добавят. Но что бы там ни было, мы будем настаивать на своем.

(*Главкон.*) А именно?

(*Сократ.*) Те, кого мы воспитываем, пусть даже не пытаются изучать что-нибудь несовершенное и направленное не к той цели, к которой всегда должно быть направлено все, как мы только что говорили по поводу астрономии. Разве ты не знаешь, что и в отношении гармонии повторяется та же ошибка? Так же, как астрономы, люди трудятся там бесплодно: они измеряют и сравнивают воспринимаемые на слух созвучия и звуки.

(*Главкон.*) Клянусь богами, у них это выходит забавно: что-то они называют «уплотнениями» (πυκνώματα) и настораживают уши, словно ловят звуки голоса из соседнего дома; одни говорят, что различают в середине какой-то отзвук, и что это наименьший интервал, который можно измерить[1]; другие возражают, уверяя, что звуки одинаковы, но и те и другие ценят уши выше ума.

(*Сократ.*) Ты говоришь о тех добрых людях, что не дают струнам покоя и терзают их, накручивая на колки. Чтобы не затягивать все это, говоря об ударах плектром, о том, как винят струны, отвергают их или кичатся ими, я прерву изображение и скажу, что имел в виду ответы не этих людей, а тех, кого мы только что решили расспросить о гармонии. Ведь они поступают совершенно так же, как астрономы: они ищут числа в воспринимаемых на слух созвучиях, но не подымаются до рассмотрения общих вопросов (προβλήματα) и не выясняют, какие числа созвучны, а какие нет и почему.

[1] Идет ли здесь речь о пифагорейской комме? (Ср. примеч. 4 к **11.1**.)

11.4. Филеб 56а

Сократ. [Уподоблением] полна прежде всего та музыка, которая строит созвучие не на мере (οὐ μέτρῳ), но на упражнении чуткости; такова же и та, что относится к авлетике[1], потому что она ищет меру всякой приводимой в движение струны по догадке, так что содержит в себе много неясного, устойчивого же мало.

[1] Авлос — духовой инструмент. По-видимому, здесь оговорка, и в действительности речь идет о кифаристике, поскольку ниже говорится о струнах.

11.5. Филеб, 17се

Сократ. После того, милейший, как ты узнаешь, каково число интервалов (διαστήματα) между высокими и низкими тонами, каковы эти интервалы и где их границы (ὅρους), сколько они образуют систем (предшественники наши, открывшие эти системы, завещали нам, своим потомкам, называть их гармониями и прилагать имена ритма и меры к другим подобным состояниям, присущим движениям тела, если измерять их числами; они повелели нам, далее, рассматривать таким же образом вообще всякое единство и множество), — после того как ты узнаешь все это, ты станешь мудрым, а когда постигнешь всякое другое единство, рассматривая его таким же способом, то сделаешься сведущим и относительно него. Напротив, беспредельное множество отдельных вещей и их содержимого неизбежно делает твою мысль также бессмысленной и неисчислимой, вследствие чего ты никогда ни в чем не обращаешь внимания ни на какое число.

12. Теоретическая астрономия

12.1. Государство, 528е–530с

(*Сократ.*) После геометрии я заговорил об астрономии, т. е. о вращении тел[1].

(*Главкон.*) Ты правильно говоришь.

(*Сократ.*) Итак, четвертым предметом познания мы назовем астрономию, в настоящее время она как-то забыта, но она воспрянет, если ею займется государство.

(*Главкон.*) Естественно. Ты недавно упрекнул меня, Сократ, в том, что моя похвала астрономии была пошлой, так вот, теперь я произнесу ей похвалу в твоем духе: ведь, по-моему, всякому ясно, что она заставляет душу взирать ввысь и ведет ее туда, прочь ото всего здешнего.

(*Сократ.*) Возможно, что всякому это ясно, кроме меня, мне-то кажется, что это не так.

(*Главкон.*) А как же?

(*Сократ.*) Если заниматься астрономией таким образом, как те, кто возводит ее до степени философии, то она даже слишком обращает наши взоры вниз.

(*Главкон.*) Что ты имеешь в виду?

(*Сократ.*) Великолепно ты, по-моему, сам для себя решил, что такое наука о вышнем. Пожалуй, ты еще скажешь, будто если кто-нибудь, запрокинув голову, разглядывает узоры на потолке и при этом кое-что распознает, то он видит это при помощи мышления, а не глазами. Возможно, ты думаешь правильно, я-то ведь простоват и потому не могу считать, что взирать ввысь нашу душу заставляет какая-либо иная наука, кроме той, что изучает бытие и незримое. Глядит ли кто, разинув рот, вверх или же, прищурившись, вниз, когда пытается с помощью ощущений что-либо распознать, все равно, утверждаю я, он никогда этого не постигнет, потому что для подобного рода вещей не существует познания и душа человека при этом смотрит не вверх, а вниз, хотя бы он даже лежал навзничь на земле или плыл по морю на спине.

(*Главкон.*) Да, поделом мне досталось! Ты прав. Но как, по-твоему, следует изучать астрономию в отличие от того, что делают теперь? В чем польза ее изучения для нашей цели?

(*Сократ.*) А вот как. Эти узоры на небе, украшающие область видимого, надо признать самыми прекрасными и совершенными из подобного рода вещей, но все же они сильно уступают вещам истинным с их перемещениями друг относительно друга, происходящими с подлинными быстротой и медленностью, согласно истинному числу и во всевозможных истинных формах, причем перемещается все содержимое. Это постигается разумом и рассудком, но не зрением. Или, потвоему, именно им?

(*Главкон.*) Ни в коем случае.

(*Сократ.*) Значит, небесным узором надо пользоваться как пособием для изучения подлинного бытия, подобно тому как если бы нам подвернулись чертежи Дедала или какого-нибудь иного мастера либо художника, отлично и старательно вычерченные. Кто сведущ в геометрии, тот, взглянув на них, нашел бы прекрасным их выполнение, но было бы смешно их всерьез рассматривать как источник истинного познания равенства, удвоения или каких-либо иных отношений[2].

(*Главкон.*) Еще бы не смешно!

(*Сократ.*) А разве, по-твоему, не был бы убежден в этом и подлинный астроном, глядя на круговращение звезд? Он нашел бы, что все это прекрасно устроено, — ведь так создал демиург и небо, и все, что на нем: соизмеримость ночи и дня, этих последних с месяцем, месяца — с годом, звезд же со всем этим и между собой. Но он, конечно, будет считать нелепым того, кто полагает, что все это всегда происходит одинаково и ни в чем не бывает никаких отклонений, причем всячески старается добиться здесь истины, между тем как небесные светила имеют тело и воспринимаются зрением.

(*Главкон.*) Я согласен с твоими доводами.

(*Сократ.*) Значит, мы будем изучать астрономию так же, как геометрию, а то, что на небе, оставим в стороне, раз мы хотим действительно освоить астрономию и использовать еще неиспользованное разумное по своей природе начало нашей души.

(*Главкон.*) Ты намного осложняешь задачу астрономии в сравнении с тем, как ее теперь изучают.

---

[1] Ср. **2.15**.
[2] Ср. **15.1**.

12.2. Законы, 821b–822b

Афинянин. Друзья мои, ныне, сказал бы я, все мы, эллины, заблуждаемся относительно великих богов — Солнца и Луны.

Клиний. В чем же состоит это заблуждение?

Афинянин. Мы говорим, что они никогда не движутся одним и тем же путем, так же как и некоторые другие звезды, и потому мы их называем блуждающими (πλανητά).

Клиний. Клянусь Зевсом, чужеземец, ты говоришь истину. Однако я в своей жизни нередко наблюдал, как Утренняя, Вечерняя[1] и некоторые иные [звезды] никогда не совершают бега по тому же пути, но блуждают повсюду, Солнце же и Луна проделывают то, что нам всем постоянно известно. <...>

Афинянин. Друзья мои, это мнение о блуждании Луны, Солнца и остальных звезд неправильно. Дело обстоит как раз наоборот. Все они сохраняют один и тот же путь, совершая не много круговых движений, но лишь одно, и только кажется, что они движутся по многим [кругам]. Опять-таки неверно считать самое быстрое из этих светил самым медленным, а самое медленное — самым быстрым. Природа устроила это по-своему, а мы держимся иного мнения.

---

[1] Диоген Лаэрций (VIII, 14) сообщает, что первым среди греков о тождестве Вечерней и Утренней звезды (планета Венера) сказал Парменид (о нем см. примеч. к **1.10**).

12.3. Послезаконие, 989e–990c

Афинянин. Я по мере моих сил буду указывать, а тот, кто может, пусть выслушает, каким образом усваивается благочестие. Пожалуй, придется услышать нечто не совсем обычное. Ведь мы сказали бы, что наука, о которой идет речь, — чего никогда не предположил бы человек, не сведущий в этом деле, — называется астрономией. Вам неведомо, что величайшим мудрецом по необходимости должен быть именно истинный астроном, — не тот, кто занимается астрономией по Гесиоду и ему подобным, ограничивающимся наблюдением над заходом и восходом светил, но тот, который из восьми кругооборотов наблюдает преимущественно семь[1], при которых каждое светило совершает свой круговой путь, и это будет нелегко усмотреть тому, кто непричастен чудесам природы. Мы укажем, согласно нашему утверждению, надлежащий способ и путь усвоения. Прежде всего пусть будет сказано следующее. Луна очень быстро совершает свой кругооборот и проходит свои фазы, начиная с полнолуния. Затем надо поразмыслить о Солнце, которое совершает повороты в течение всего круговращения, и о его спутниках[2]. Чтобы не повторять все время одного и того же обо всех этих светилах, скажем, что путь остальных светил, указанных нами ранее, понять нелегко[3].

---

[1] То есть изучает движение Солнца, Луны и планет по небу неподвижных звезд.

[2] Спутники Солнца — внутренние планеты, т. е. Венера и Меркурий (ср. примеч. 5 к **12.5**). При наблюдении с Земли они отклоняются от Солнца на максимальный угол, равный для Венеры 45°, для Меркурия 23° (рис. 20).

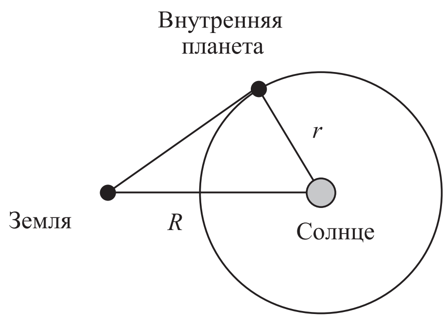


Рис. 20.

[3] Остальные светила — внешние планеты, т. е. Марс, Юпитер и Сатурн.

12.4. Послезаконие, 991e

Афинянин. Всякий чертеж, любое сочетание чисел или гармоническое единство имеют сходство с кругообращением звезд; следовательно, единичное для того, кто надлежащим образом его усвоил, разъясняет и все остальное.

12.5. Тимей, 35b–36d

Тимей. Рассекши весь образовавшийся состав по длине на две части, он сложил обе части крест-накрест наподобие буквы X и согнул каждую из них в круг, заставив концы сойтись в точке, противоположной точке их пересечения. После этого он принудил их единообразно и в одном и том же месте двигаться по кругу, причем сделал один из кругов внешним, а другой — внутренним. Внешнее вращение он нарек природой тождественного, а внутреннее — природой иного[1]. Круг тождественного он заставил вращаться слева направо, вдоль стороны, а круг иного — справа налево, вдоль диагонали, но перевес он даровал движению тождественного и подобного, ибо оставил его единым и неделимым[2], в то время как внутреннее движение шестикратно разделил на семь неравных кругов, сохраняя число двойных и тройных промежутков, а тех и других было по три[3]. Вращаться этим кругам он определил в противоположных друг другу направлениях, притом так, чтобы скорость у трех кругов была одинаковая[4], а у остальных четырех[5] — неодинаковая сравнительно друг с другом и с теми тремя, однако отмеренная в правильном соотношении.

---

[1] Круг тождественного = небесный экватор; круг иного = эклиптика. Они наклонены друг к другу, пересекаясь в точках равноденствия (рис. 21).

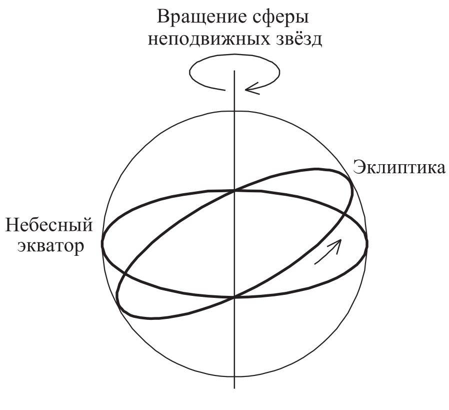


Рис. 21.

[2] Слева направо, т. е. с востока на запад, вращается небо неподвижных звезд; справа налево, т. е. с запада на восток, медленно перемещаются по эклиптике относительно неба неподвижных звезд Солнце, Луна и планеты.

[3] См. **11.1**.

[4] Круги Солнца, Венеры и Меркурия (ср. примеч. 2 к **12.3**).

[5] Круги Луны, Марса, Юпитера и Сатурна.

12.6. Государство, 588a

(*Сократ.*) Однако это число [729] верно[1], и вдобавок оно подходит к жизням, поскольку ему соответствуют дни и ночи, месяцы и годы[2].

---

[1] Начало отрывка см. **8.4**; $729 = 27^2 = 9^3 = 3^6$.

[2] Счет здесь идет не на сутки, но на полусутки («дни и ночи» у Платона). Будем считать, что лунный месяц составляют $29^1/_2$ суток = 59 полусуток (более точное значение $\approx 29,5306$). В таком случае 12 месяцев составят 354 суток = 708 полусуток. Год не содержит целого числа месяцев. Отсюда возникает идея вычислить длительность «большого» года, содержащего целое число как месяцев, так и обычных лет. Если за большой год взять 59 обычных лет, то тогда в большом году будет столько же месяцев, сколько полусуток в обычном году.

Число вставных месяцев в большом году будет равно числу вставных полусуток в обычном году; мы узнаем его, вычтя 708 из числа полусуток в обычном году.

Расчетами большого года занимался пифагореец Филолай Кротонский. Известно, что Платон посетил его, будучи в возрасте 28 лет (44 A5 DK); позднее он за сорок мин серебра купил у родственников Филолая пифагорейскую книгу «О природе» (44 A1 DK). О вычислениях Филолая сообщается следующее: «Год пифагорейца Филолая состоит из 59 лет; в нем 21 вставной месяц. Филолай утверждал, что естественный год содержит $364^1/_2$ суток» (44 A22 DK).

Филолай принял длительность обычного года равной $364^1/_2$ суткам = 729 полусуткам, что дает $729 - 708 = 21$ вставной месяц. Но почему длительность года не взять равной 365 суткам = 730 полусуткам — ведь это более точное приближение? Неужели оно не было известно Филолаю? Можно предположить, что Филолай сделал этот шаг, исходя из спекулятивного стремления к «числовой гармонии», поскольку $729 = 27^2 = 9^3 = 3^6$.

Вычислениями большого года занимался также Энопид Хиосский (см. **1.4**). «Астроном Энопид Хиосский посвятил в храм в Олимпии бронзовую табличку, начертав на ней календарь на 59 лет и утверждая, что таков великий год» (41 9 DK). «Энопид Хиосский определил продолжительность естественного года в $365^{22}/_{59}$ суток» (41 8 DK).

Откуда берется такая странная поправка $^{22}/_{59}$? Число 59 в знаменателе — повидимому, то же самое, что и число обычных лет в большом году. Если взять длительность обычного года равной 365 суткам = 730 полусуткам, то тогда в большом г. будет $730 - 708 = 22$ вставных месяца. Отсюда, по видимому, и возникает числитель 22. Большой год Энопида составляет $365 \cdot 59 + 22 = 21557$ суток. Если длительность месяца считать равной 59 полусуток, то тогда в большом году будет 730 полных месяцев и еще 22 суток. Зачем они нужны? Ведь большой год по определению должен содержать целое число месяцев!

Скорее всего, Энопид продолжал считать, что большой год содержит ровно 730 полных месяцев. Тогда длительность месяца он полагал равной уже не 59 полусуток (таково было первое приближение), но $21557 : 730 \approx 29,5301$ суток. А этот результат лишь в шестой значащей цифре отличается от современных данных. Впрочем, при этом длительность месяца задана существенно точнее, нежели длительность обычного года.

13. Математические определения

13.1. Менон, 74b–76a

Сократ. Если б тебя спросили в таком же роде, как я сейчас сказал: «Что такое фигура (σχῆμα), Менон?» — и если бы ты отвечал, что это закругленность (στρογγυλότης), — а тебя спросили бы, как я: «Закругленность — это фигура вообще или одна из фигур?» — ты бы, конечно, сказал, что одна из фигур.

Менон. Так и сказал бы.

Сократ. И не потому ли, что есть еще другие фигуры?

Менон. Именно поэтому.

Сократ. А если бы тебя спросили вдобавок, какие это фигуры, ты назвал бы их?

Менон. Конечно. <. . . >

Сократ. А если бы дальше повели разговор, как я, и сказали бы тебе: «Все-то время мы возвращаемся ко множеству. Но не о том у нас речь; ведь ты многие вещи называешь одним именем и говоришь, что все они не что иное, как фигуры, даже если они противоположны друг другу; так что же это такое, включающее в себя закругленное (τὸ στρογγύλον)[1] и прямое (τὸ εὐθύ)[2], — то, что ты именуешь фигурами, утверждая, что круглое и прямое — фигуры в равной мере?» Или ты говоришь иначе?

Менон. Нет, так.

Сократ. Но если ты так говоришь, то, по твоим словам, закругленное ничуть не больше закругленное, чем прямое, а прямое ничуть не более прямое, чем закругленное?

Менон. Вовсе нет, Сократ.

Сократ. Все же ты говоришь, что круглое есть фигура ничуть не больше, чем прямое, и наоборот?

Менон. Вот это верно.

Сократ. Что же тогда носит имя «фигура»? Попробуй ответить. Если тому, кто задает тебе такие вопросы насчет фигуры, ты скажешь: «Никак я не пойму, любезный, чего ты хочешь, и не знаю, о чем ты говоришь», — он, наверное, удивится и возразит: «Как это ты не поймешь?! Я ищу, что во всех этих вещах есть одинакового». Или же и на такой вопрос, Менон, тебе нечего будет ответить: «Что же в закругленном, и в прямом, и во всем прочем, что ты называешь фигурами, есть общего?» Попробуй сказать — так ты и подготовишься к ответу о добродетели.

Менон. Нет, Сократ, скажи сам. <...>

Сократ. Ну ладно, попробуем сказать тебе, что такое фигура. Посмотри же, согласен ли ты со мной: фигура, по-нашему, это единственное, что всегда сопутствует цвету. Хватит тебе этого, или ты ищешь еще чего-нибудь? Если бы ты сказал мне так о добродетели, я удовольствовался бы этим.

Менон. Но ведь это слишком просто, Сократ!

Сократ. Как так?

Менон. По твоим словам, фигура — это нечто такое, что всегда сопутствует окраске. Пусть так. Но если вдруг кто-нибудь тебе скажет, что не знает, что такое окраска, и точно так же не может судить о ней, как и об фигуре, понравится ли тебе тогда твой ответ?[3]

Сократ. Да он будет чистой правдой, Менон! Если вопрошающий окажется одним из тех мудрецов — любителей спорить и препираться, я отвечу ему: «Свое я сказал, а если я говорю неправильно, то теперь твое дело взять слово и уличить меня». Если же собеседники, как мы с тобой сейчас, захотят рассуждать по-дружески, то отвечать следует мягче и в большом соответствии с искусством вести рассуждение. А это искусство состоит не только в том, чтобы отвечать правду: надо еще исходить из того, что известно вопрошающему, по его собственному признанию. Попробую и я говорить с тобой так же. Скажи мне: существует ли нечто такое, что ты называешь «оконечностью» (τελευτὴν)? Я имею в виду некий край и завершение (πέρας καὶ ἔσχατον) — ведь это одно и то же. Продик[4], наверное, не согласился бы с нами. Но ты-то говоришь о чем-нибудь, что оно завершается и оканчивается (πεπεράνθαι καὶ τετελευτηκέναι)? Я хочу сказать только это, без всяких ухищрений.

Менон. Говорю, конечно. По-моему, я понимаю, что ты имеешь в виду.

Сократ. Дальше. Существует ли нечто такое, что ты называешь плоским (ἐπίπεδον), и другое, что ты именуешь телесным (στερεόν), как это принято в геометрии?

Менон. Существует, конечно.

Сократ. Ну вот, из этого ты теперь уже можешь понять, что я называю фигурой. О каждой из фигур я говорю: то, чем ограничивается тело, и есть его фигура. Или вкратце я сказал бы так: фигура — это край тела (στερεοῦ πέρας σχῆμα εἶναι)[5].

---

[1] См. примеч. 1 к **13.2**.

[2] Ср. примеч. 2 к **13.2**.

[3] Определение фигуры как того, что всегда сопутствует цвету, является «физическим», а не математическим. Ведь у математических фигур нет никакого «цвета».

[4] Продик Кеосский (вторая половина V в. до н. э.) — известный софист, специалист по различению синонимов (см. Протагор, 340b).

[5] Ср. *Евклид.* Начала (I, опр. 13, 14): «Граница (ὅρος) есть то, что является краем (πέρας) чего-либо. Фигура (σχῆμα) есть то, что содержится внутри какой-нибудь или каких-нибудь границ».

13.2. Парменид, 137e

Парменид. Ведь закругленное (στρογγύλον) есть то, края (τὰ ἔσχατα) чего повсюду одинаково отстоят от середины[1].

Аристотель. Да.

Парменид. А прямое (εὐθύ) — то, середина чего заслоняет оба края (τὸ μέσο ἀμφοῖν τοῖν ἐσχάτοιν ἐπίπροσθεν)[2].

Аристотель. Это так.

Парменид. Итак, единое (τὸ ἕν) имело бы части и было бы многим, если бы было причастно прямолинейной фигуре (εὐθέος σχήματος)[3] или округлой (περιφεροῦς).

Аристотель. Совершенно верно.

Парменид. Следовательно, оно — не прямое и не округлое, если не имеет частей[4].

---

[1] Ср. с определением круга, которое приводит Евклид в «Началах» (I, опр. 15): «Круг (κύκλος) есть плоская фигура, заключенная внутри одной линии [называемой окружностью (περιφέρεια)], на которую все из одной точки внутри фигуры падающие прямые [на окружность круга] равны между собой».

Обращает на себя разница между словами στρογγύλον у Парменида-Платона и κύκλος у Евклида. Возможно, что название στρογγύλον и соответствующее ему определение исходно были общими и для плоского круга, и для телесной сферы.

У самого Парменида в его поэме «О природе» бытие описывается в следующих словах (28 B8 DK, строки 42–45, 49):

> Но поскольку есть крайняя граница, оно заключено
> Отовсюду, похожее на глыбу прекруглого шара,
> Везде равновесное (ἰσοπαλές) от середины, ибо нет нужды,
> Чтобы его было больше вот тут, нежели вон там. <...>
> Ибо отовсюду равное, оно однородно внутри границ.

Аристотель в трактате «О небе» (297a24) говорит: «когда край (τὸ ἔσχατον) одинаково отстоит от середины, это и есть форма сферы (τὸ σχῆμα σφαίρας)»; и в «Метафизике» (1033b14) он же говорит, что «сфера есть фигура, одинаково отстоящая от середины».

Герон в «Определениях» (76) приводит три определения сферы, в первом из которых он говорит о ней совершенно так же, как Евклид о круге: «Сфера (σφαῖρα) есть телесная фигура, ограниченная одной поверхностью так, что прямые линии, падающие из одной точки внутри и посередине к точкам, которые лежат на ней, равны между собой». Во втором определении (по сути дела — вариант первого) он употребляет то же самое слово στρογγύλον, что и Платон: «Телесная фигура, округлая снаружи (ἄκρως στρογγύλον), у которой все расстояния (ἀποστάσεις) от середины одинаковы».

В противоположность этим *описательным* определениям Евклид в «Началах» определяет сферу *генетически* (XI, опр. 15): «Сфера есть охваченная фигура, если при неподвижном диаметре полукруга вращающийся полукруг вернется туда же, откуда он начал двигаться». (Третье определение Герона почти дословно совпадает с этим определением Евклида.)

См. также **13.3**, **13.4**.

[2] Ср. со следующим пассажем Аристотеля в «Топике» (148b27–32), в котором данное определение воспроизводится дословно и подвергается критике: «Если ограниченную прямую линию определять как *край плоскости, имеющий концы, у которого середина заслоняет концы* (τὸ μέσο ἐπιπροσθεῖ τοῖς πέρασιν), то тогда, поскольку определение ограниченной линии есть *край плоскости, имеющий концы*, оставшееся должно быть определением прямой: *у которого середина заслоняет концы*. Но неограниченная линия не имеет ни середины, ни концов, и все же она прямая».

«Оптическое» определение прямой линии, упомянутое Платоном и Аристотелем, может быть, послужило основой для того весьма темного определения прямой, которое дает Евклид в «Началах» (I, опр. 4): «Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней (εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐφ' ἑαυτῆς σημεῖοις κεῖται)».

Более поздние определения прямой восходят к постулату Архимеда: «Из всех линий, имеющих одни и те же концы, прямая будет наименьшей» (О шаре и цилиндре, постулат 1).

[3] Ср. *Евклид.* Начала (I, опр. 19): «Прямолинейные фигуры (σχήματα εὐθύγραμμά) суть те, которые содержатся между прямыми».

[4] Ср. **2.16**, **13.6**.

13.3. Тимей, 62d

Тимей. Коль скоро все небо сферообразно (σφαιροειδοῦς), значит, все края (ἔσχατα), равноотстоящие от середины, будут по своей природе одинаково крайними, между тем как середина, на одну и ту же меру отстоящая от краев, должна считаться пребывающей прямо напротив всех [краев][1]. <...> И пусть в середине Вселенной находится уравновешенное (ἰσοπαλές) тело; оно не могло бы продвинуться ни к одному из краев, будучи со всеми в одинаковом отношении (ὁμοιότητα)[2].

---

[1] Ср. примеч. 1 к **13.2**.

[2] Ср. *Псевдо-Плутарх.* Утешение философией (896d): «Парменид и Демокрит говорят, что вследствие равного отстояния со всех сторон [Земля] остается в равновесии (ἐπὶ τῆς ἰσορροπίας), так как нет причины, по которой она скорее склонилась бы сюда, нежели туда: поэтому она только колеблется, но не движется».

13.4. Письмо, VII, 342bc, 343ab

«Круг» (κύκλος) — это нечто произносимое, и его имя (ὄνομα) — то самое, которое мы произнесли. Во-вторых, его определение (λόγος) составлено из имен и глаголов. «То, края (τῶν ἐσχάτων) чего повсюду одинаково отстоят от середины» — было бы определением того, что носит имя «закругленного» (στρογγύλον), «округлого» (περιφερές) и «круга» (κύκλος)[1]. <...>[2]

Мы утверждаем, что ни в одном из названий всех этих кругов нет ничего устойчивого и не существует препятствия тому, чтобы закругленное было названо прямым и наоборот, чтобы прямое было названо закругленным; в то же время вещи, называемые то одним, то другим, противоположным именем, стойко остаются теми же самыми[3]. И с определением та же история, если оно слагается из имен и глаголов, и в то же время ничто твердо установленное не бывает здесь достаточно твердым.

[1] Ср. примеч. 1 к **13.2**.
[2] Пропущенный отрывок см. **16.4**.
[3] Ср. **13.5**.

13.5. Кратил, 435b

Сократ. Откуда, думаешь ты, взяты имена, подобающие каждому из чисел, если ты не допустишь, что условие и договор имеют значение для правильности имен[1]?

[1] Ср. **13.4**.

13.6. Софист, 245ab

Чужеземец. Истинно единое (ἀληθῶς ἕν), согласно правильному определению, должно, конечно, считаться совсем не имеющим частей (ἀμερές)[1].

Теэтет. Конечно, должно.

Чужеземец. В противном случае, [будучи составленным] из многих частей, оно не будет соответствовать определению.

[1] Ср. **2.16**, **13.2**, **13.7**. Для сравнения приведем определения точки и единицы, которые дает Евклид в «Началах» (I, опр. 1): «Точка есть то, у чего нет никаких частей (σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν)»; (VII, опр. 1): «Единица есть то, через что каждое из существующего считается единым (μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται)».

13.7. Парменид, 164d–165b

Парменид. [Если единого не существует], то если кто-нибудь возьмет кажущееся самым малым, то и оно, только что представлявшееся одним, вдруг, как во сне, окажется многим и из ничтожно малого превратится в огромное по сравнению с частями, получающимися в результате его дробления. <…>

Далее, будет представляться, что каждое скопление имеет конец (πέρας) по отношению к другому скоплению (ὄγκον), хотя по отношению к самому себе оно не имеет ни начала, ни конца, ни середины.

Аристотель. Каким образом?

Парменид. А вот каким: когда кто-нибудь мысленно примет что-либо за таковое, то каждый раз перед началом окажется другое начало, за концом останется еще другой конец и в середине появится другая, более средняя, середина, меньше первой, потому что нигде нельзя уловить единого, раз оно не существует[1].

---

[1] С помощью такого рода рассуждений могла обосновываться необходимость введения в геометрию понятия «точки, не имеющей частей».

13.8. Государство, 510cd

(*Сократ*). Я думаю, ты знаешь, что те, кто занимается геометрией, вычислениями и тому подобными занятиями, предполагают в любом своем исследовании, будто им известно, что такое чет и нечет[1], фигуры[2], три вида углов[3] и прочее в том же роде. Это они принимают за исходные предположения (ὑποθέσεις) и не считают нужным отдавать в них отчет (λόγος) ни себе, ни другим, словно это всякому и без того ясно. Исходя из этих предположений, они разбирают уже все остальное и последовательно доводят до конца то, что было предметом их рассмотрения[4].

---

[1] Определение четного и нечетного числа см. **4.8**, **4.9**.

[2] Определение фигуры см. **13.1**.

[3] Три вида углов — прямой, острый и тупой. Ср. *Евклид*. Начала (I, опр. 10–12).

[4] Ср. *Аристотель*. Вторая аналитика (72a14–24): «Из непосредственных силлогистических начал тезисом (θέσιν) я называю то, которое нельзя доказать и которое тому, кто будет что-то изучать, не обязательно иметь. То, которое необходимо иметь каждому, кто будет что-то изучать, я называю аксиомой (ἀξίωμα); некоторые такие конечно имеются, и главным образом их мы так и называем. Тезис, который принимает ту или иную часть противоречия (например, «нечто есть» или «нечто не есть»), есть предположение (ὑπόθεσις), без этого же — определение (ὁρισμός). Определение есть именно тезис; в самом деле, занимающийся арифметикой выдвигает тезис, что единица по количеству неделима, но это не есть предположение*. Ибо не одно и то же сказать, *что есть* единица, и сказать, что единица *есть*». Ср. также (76b27–77a3): «Все то, что хотя и доказуемо, но принимается без доказательства, если изучающему оно кажется правильным и он принимает его, есть предположение, притом предположение не вообще, а лишь для этого изучающего. Но если это принимают, в то время как изучающий не имеет никакого мнения об этом или имеет противоположное мнение, то допускают это. Этим и различаются предположение и допущение (αἴτημα). Ибо допущение есть нечто противное

мнению изучающего или нечто такое, что, будучи доказываемым, принимается и применяется недоказанным.

Определения же (λχρο ροι) не предположения (они не говорят о том, существует вот это или нет); предположения относятся к посылкам, определения же должны быть только поняты, и это не предположение (иначе можно было бы сказать, что и слушание есть некоторое предположение); нет, предположения таковы, что при их наличии получается заключение благодаря тому, что они имеются. (И предположения геометра не есть нечто ложное, как это утверждали некоторые, указывая, что не следует пользоваться чем-то ложным, а геометр как раз и допускает ложное, когда про линию длиною не в одну стопу говорит, что она в одну стопу**,) или про начерченную линию, которая не прямая, говорит, что она такова. Дело в том, что геометр ничего не выводит на основании вот этой линии, какую он так назвал, а выводит на основании того, что он ею выражает.)»

* Такое определение «необязательно иметь» — потому что в доказательстве арифметических теорем оно не используется.

** Ср. примеч. 2 к **6.2**.

14. Правдоподобие в математике

14.1. Федон, 92d

(*Симмий.*) Но я прекрасно знаю, что доводы, доказывающие свою правоту через правдоподобие (διὰ τῶν εἰκότων), — это пустохвалы, и, если не быть построже, они обманут тебя самым жестоким образом, как случается и в геометрии, и во всем прочем.

14.2. Теэтет, 162d–163a

Сократ. На твой вопрос Протагор или кто-то за него ответил бы: «<...> Вместо того чтобы приводить неопровержимые доказательства, вы довольствуетесь правдоподобием (εἰκότι), а ведь если бы Феодор или какой-либо другой геометр стал пользоваться ею в геометрии, грош была бы ему цена».

14.3. Кратил, 436d

Сократ. И в чертежах иногда после первой небольшой и незаметной ошибки все остальное уже вынужденно следует за ней и с ней согласуется[1].

---

[1] Геометрические софизмы, основывающиеся на псевдочертежах, упоминаются Аристотелем в «Топике»: «Не выводит заключения ни из истинных и первых, ни из правдоподобных [посылок] тот, кто делает псевдочертежи (ψευδογραφῶν). <...> Ведь здесь составляют умозаключение из положений, хотя и свойственных науке, но не истинных. И паралогизм получается оттого, что полуокружность описывается не так, как нужно, или оттого, что проводят линии не так, как следует» (101a9–17). См. также: Топика (132a31–33, 157a1–3, 160b35–37); О софистических опровержениях (171b12–172b5). Систематически геометрические софизмы рассматривались Евклидом в несохранившемся сочинении Ψευδάρια, о чем сообщает Прокл в

«Комментарии к "Началам" Евклида» (70_{10--14}): «Он изложил отдельно и в порядке различные виды ложных рассуждений, упражняя для каждого из них наш ум при помощи теорем всякого рода, где он противопоставляет истинное ложному, и где наряду с доказательством он приводит и опровержение заблуждения».

Примеры геометрических софизмов см. (Дубнов, 1969).

15. Математические объекты «сами по себе»

15.1. Государство, 510d

(*Сократ.*) Но ведь когда они [геометры] пользуются вдобавок зрительными образами (ὁρωμένοις εἴδεσι) и делают о них выводы (λόγους), их мысль обращена не на эти [образы], а на то, подобием чего они служат. Выводы свои они делают только для квадрата самого по себе (τοῦ τετραγώου αὐτοῦ) и его диагонали, а не для той диагонали, которую они начертили[1].

[1] Ср. **16.4**.

15.2. Филеб, 62ab

Сократ. Возьмем в таком случае человека, разумеющего, что такое справедливость сама по себе, и понятие (λόγον) которого соответствует его мысли; пусть он таким же образом мыслит обо всем вообще существующем.

Протарх. Пусть будет так.

Сократ. Достигнет ли он достаточного знания, имея понятие (λόγον) относительно самих божественных круга и сферы, человеческой же сферы и кругов не ведая, но пользуясь при постройке домов и в других подобных делах линейкой и циркулем?

Протарх. Мы окажемся, Сократ, в смешном положении, если будем говорить (λέγομεν) только о знаниях, относящихся к божественным сущностям.

Сократ. Что ты говоришь? Неужели необходимо привнести и примешать сюда ненадежное и нечистое искусство ложной линейки и ложного круга[1]?

Протарх. Необходимо, если кто из нас на самом деле хочет отыскать путь к себе домой.

[1] Весьма иронично!

15.3. Федон, 74a–75b

(*Сократ.*) Мы признаем, что существует нечто, называемое равным, — я говорю не о том, что бревно бывает равно бревну, камень камню и тому подобное, но о чем-то ином, отличном от всего этого, — о равенстве самом по себе (αὐτὸ τὸ ἴσον). Признаем мы, что оно существует или не признаем?

(*Симмий.*) Признаем, клянусь Зевсом, да еще как!

(*Сократ.*) И мы знаем, что это такое?

(*Симмий.*) Прекрасно знаем.

(*Сократ.*) Но откуда мы берем это знание? Не из тех ли вещей, о которых мы сейчас говорили? Видя равные между собою бревна, или камни, или еще что-нибудь, мы через них постигаем иное, отличное от них. Или же оно не кажется тебе иным, отличным? Тогда взгляни вот так: бывает, что равные камни или бревна хоть и не меняются нисколько, а все ж одному человеку кажутся равными, а другому нет?

(*Симмий.*) Конечно, бывает.

(*Сократ.*) Ну, а равное само по себе — не случалось ли, чтобы оно казалось тебе неравным, т. е. чтобы равенство показалось тебе неравенством[1]?

(*Симмий.*) Никогда, Сократ!

(*Сократ.*) Значит, это не одно и то же: равные вещи и равенство само по себе.

---

[1] Ср. **16.1**.

16. Математическое познание

16.1. Теэтет, 195e–196b

Сократ. «Что же, — скажет он, — одиннадцать, которое всего только кем-то мыслится, никогда нельзя будет счесть за двенадцать, которое тоже лишь мыслится?» Давай-ка отвечай!

Теэтет. Но я отвечу, что, когда видишь или осязаешь, можно принять одиннадцать за двенадцать, но мысленно такое представление об этих числах невозможно.

Сократ. Что же? Думаешь, если кто-то будет рассматривать про себя пять и семь, — не воображать себе семь и пять человек или что-то еще в этом роде, но рассматривать сами [числа] пять и семь, которые, как мы говорили, суть знаки, запечатленные на дощечке из воска, и по поводу которых нельзя составить себе ложного представления, — так вот, спрашивая себя, сколько же это будет вместе, какой-то человек, подумавши, скажет, что одиннадцать, а какой-то — что двенадцать? Или все и подумают и скажут, что двенадцать?

Теэтет. Клянусь Зевсом, нет! Многие скажут, что одиннадцать. Если же кто-то будет рассматривать большие числа, то и ошибка будет больше. Ведь ты, я думаю, скорее говоришь о всяком числе.

Сократ. Ты правильно думаешь. И заметь, тогда происходит вот что: те самые оттиснутые в воске двенадцать принимаются за одиннадцать[1].

[1] Ср. **15.3**.

16.2. Теэтет, 198bc

Сократ. Не тот ли знаток арифметики, кто знает все числа? Ведь в душе у него присутствуют знания всех чисел.

Теэтет. Ну и что?

Сократ. Значит, в любое время он может либо про себя пересчитывать эти числа, либо сосчитать какие-то внешние предметы, поскольку они имеют число?

Теэтет. А как же иначе?

Сократ. И мы предположим, что считать — это не что иное, как смотреть, какое число может получиться?

Теэтет. Так.

Сократ. Значит, кто исследует то, что знает, кажется как бы незнающим, а мы уже договорились, что он знает все числа.

16.3. Теэтет, 185cd

Теэтет. Ты толкуешь о бытии и небытии, о подобии и неподобии, о тождестве и различии, а также, определяются ли они единицей (ἕν) или иным каким-то числом[1]. Ясно, что твой вопрос относится и к четному или нечетному, и ко всему тому, что отсюда следует, — с помощью какой части тела ощущаем мы это душой[2]?

[1] Сами темы — пифагорейские. Ср. *Аристотель.* Метафизика (985b23–986a26): «Так называемые пифагорейцы, занявшись математикой, первые развили ее и, овладев ею, стали считать ее начала (ἀρχάς) началами всего существующего. А так как среди них числа суть от природы первое, а в числах пифагорейцы усматривали (так им казалось) много сходного с тем, что существует и возникает, — больше, чем в огне, земле и воде (например, такое-то свойство чисел есть справедливость, а такое-то — душа и ум, другое — удача, и, можно сказать, в каждом из остальных случаев точно так же); так как, далее, они видели, что присущие гармонии свойства и отношения (λόγους) выразимы в числах; так как, следовательно, им казалось, что все остальное по своей природе явно уподобляемо числам и что числа — первое во всей природе, то они предположили, что элементы (στοιχεῖα) чисел суть элементы всего существующего и что все небо есть гармония и число. <. . . > Во всяком случае очевидно, что они число принимают за начало и материю для существующего,

его состояний и свойств; а элементами числа они считают четное и нечетное, из коих последнее — предельное, а первое — беспредельное; а единое (τὸ ἕν) состоит у них из того и другого (а именно: оно и четное и нечетное); число происходит из единого, а все небо, как было сказано, — это числа. Другие из них утверждают, что имеется десять начал, расположенных попарно: предел (πέρας) и беспредельное (ἄπειρον), нечетное и четное, единое (ἕν) и многое (πλῆθος), правое и левое, мужское и женское, покоящееся и движущееся, прямое (εὐθύ) и кривое (καμπύλον), свет и тьма, хорошее и дурное, квадратное (τετράγωνον) и продолговатое (ἑτερόμηκες)*».

* О продолговатых числах см. примеч. 4 к **3.4**.

[2] Ср. **16.4**.

16.4. Письмо VII, 342c–343a

На третьей ступени[1] стоит нарисованное и стертое или выточенное и уничтоженное. Но круг сам по себе (αὐτὸς ὁ κύκλος), из-за которого это творится, ничего такого не претерпевает, будучи совсем другим. Четвертая ступень — это знание, истинная мысль и мнение (ἐπιστήμη καὶ νοῦς ἀληθής τε δόξα) об этом другом. Все это нужно считать чем-то единым, так как оно существует не в звуках и не в телесных фигурах, но в душах[2]; благодаря этому ясно, что оно — совершенно иное, чем природа как круга самого по себе[3], так и тех трех ступеней, о которых была речь выше. Из этих [четырех] ступеней мысль наиболее родственна, близка и подобна пятой ступени, все же остальное находится от нее много дальше. <...> Все это направлено на то, чтобы о каждом предмете в равной степени выяснить, каков он и какова его сущность, ибо словесное наше выражение здесь недостаточно. Потому-то всякий имеющий разум никогда не осмелится выразить словами то, что явилось плодом его размышления, и особенно в такой негибкой форме, как письменные знаки. То, что я сейчас сказал, нужно постараться понять на том же примере. Любой круг, нарисованный и выточенный на практике, полон противоречия с пятой ступенью, так как он всюду причастен прямизне. Круг же сам по себе, как мы утверждаем, ни в какой степени не содержит в себе противоположной природы[4].

---

[1] На первой ступени находится слово «круг», на второй — определение круга (см. **13.4**).

[2] Ср. **16.3**.

[3] «Круг сам по себе» находится на пятой ступени.

[4] Не подразумевается ли здесь, что «круг сам по себе» соприкасается с прямой в точке и поэтому он «нигде не причастен прямизне», чего нельзя сказать о кругах начерченных и выточенных? (Ср. примеч. 1 к **1.9**, а также **15.2**.)

16.5. Государство, 458d

(*Главкон.*) Это не геометрическая, а эротическая неизбежность; она, пожалуй, острее той убеждает и увлекает большинство людей.

17. Диалектика количественных отношений

17.1. Филеб, 24e–25b

Сократ. Все, что представляется нам становящимся больше и меньше и принимающим «сильно», «слабо» и «слишком», а также все подобное этому, согласно предшествующему нашему рассуждению, нужно отнести к роду неопределенного (ἀπείρου γένος) как к некоему единству; ведь, если ты припоминаешь, мы сказали, что, сводя вместе все расчленяемое и рассекаемое, мы должны но возможности обозначать его как некую единую природу.

Протарх. Припоминаю.

Сократ. А то, что не допускает этого, но принимает противоположные свойства, — прежде всего равное и равенство (τὸ ἴσο καὶ ἰσότητα), а вслед за равным — двойное и все, что служит числом для числа или мерой для меры, — мы относим к пределу (τὸ πέρας)[1].

[1] Предел и неопределенное — первая пара противоположностей в пифагорейском списке противоположностей (см. примеч. 1 к. **16.3**).

17.2. Хармид, 168be

(*Сократ.*) О большем мы утверждаем, что оно обладает потенцией быть больше чего-то другого[1]?

(*Критий.*) Да.

(*Сократ.*) А это другое разве не будет меньшим, коль скоро первое — больше?

(*Критий.*) Это неизбежно.

(*Сократ.*) Итак, если бы мы нашли некое большее, которое было бы больше других больших и самого себя, но другие большие не превышали бы ни одно из них, то оно было бы и больше самого себя и меньше самого себя[2]? Разве не так?

(*Критий.*) Напротив, я считаю это само собой разумеющимся, Сократ.

(*Сократ.*) Значит, если что-либо является двойным по отношению к другим двойным величинам и к самому себе, то оно само и другие двойные величины составят его половину. Ведь двойным можно быть только по отношению к своей половине.

(*Критий.*) Это верно <...>

(*Сократ.*) Ты видишь, Критий, что среди всех перечисленных примеров одни кажутся нам невозможными, другие же весьма сомнительными с точки зрения применения собственной потенции к самим себе. Что касается величины (μεγέθη), множества (πλήθη) и других подобных вещей, такое применение полностью исключается.

[1] Обсуждается следующий вопрос: существуют ли такие сущности, что присущая им потенция может быть направлена не только вовне, но и на сами эти сущности?

[2] Этот фрагмент похож на какое-то рассуждение в доказательствах от противного. Может быть, на такое: «...в отрезке столько же точек, сколько в его половине — поэтому половина равна целому, и тем самым она является двойной по отношению к самой себе»?

17.3. Государство, 479b

(*Сократ.*) А многим вещам, являющимися вдвое больше чего-либо, разве это мешает оказаться в другом отношении вдвое меньшими?

17.4. Кратил, 432a

Сократ. Может быть, с теми вещами, которые существуют или не существуют в зависимости от того или иного количества, дело так и обстоит, как ты говоришь: скажем, если к десяти или к любому другому числу что-то прибавить или отнять, тотчас получится другое число.

17.5. Федон, 96e–101c

(*Сократ.*) Десять мне казалось больше восьми потому, что к восьми прибавляется два, а вещь в два локтя длиннее вещи в один локоть потому, что превосходит ее на половину собственной длины.

(*Кебет.*) Ну, хорошо, а что ты думаешь обо всем этом теперь?

(*Сократ.*) Теперь, клянусь Зевсом, я далек от мысли, будто знаю причину хотя бы одной из этих вещей. Я не решаюсь судить даже тогда, когда к единице прибавляют единицу, — то ли единица, к которой прибавили другую, стала двумя, то ли прибавляемая единица и та, к которой прибавляют, вместе становятся двумя через прибавление одной к другой. Пока каждая из них была отдельно от другой, каждая оставалась единицей и двух тогда не существовало, но вот они сблизились, и я спрашиваю себя: в этом ли именно причина возникновения двух — в том, что произошла встреча, вызванная взаимным сближением? И если кто разделяет единицу, я не могу больше верить, что двойка появляется именно по этой причине — через разделение, ибо тогда причина будет как раз противоположной причине образования двух: только что мы утверждали, будто единицы взаимно сближаются и прибавляются одна к другой, а теперь говорим, что одна от другой отделяется и отнимается! И я не могу уверить себя, будто понимаю, почему и как возникает единица или что бы то ни было иное — почему оно возникает, гибнет или существует. Короче говоря, этот способ исследования мне решительно не нравится, и я выбираю себе наугад другой. <...>

(*Сократ.*) Стало быть, ты побоялся бы утверждать, что десять больше восьми на два и по этой причине превосходит восемь, но сказал бы, что десять превосходит восемь количеством и через количество? И что вещь в два локтя больше вещи в один локоть длиною, но не на половину собственного размера? Ведь и здесь приходится опасаться того же самого.

(*Кебет.*) Совершенно верно.

(*Сократ.*) Пойдем дальше. Разве не остерегся бы ты говорить, что, когда прибавляют один к одному, причина появления двух есть прибавление, а когда разделяют одно — то разделение? Разве ты не закричал бы во весь голос, что знаешь лишь единственный путь, каким возникает любая вещь, — это ее причастность особой сущности, которой она должна быть причастна, и что в данном случае ты можешь назвать лишь единственную причину возникновения двух — это причастность двойке. Все, чему предстоит сделаться двумя, должно быть причастно двойке, а чему предстоит сделаться одним — единице. А всяких разделений, прибавлений и прочих подобных тонкостей тебе даже и касаться не надо.

18. Математическое образование

18.1. Государство, 536de

(*Сократ.*) Вычисления, геометрию и разного рода другие предварительные познания, которые должны предшествовать диалектике, надо преподавать нашим стражам еще в детстве, не делая, однако, принудительной форму обучения.

(*Главкон.*) То есть?

(*Сократ.*) Свободнорожденному человеку ни одну науку не следует изучать рабски. Правда, если тело насильно заставляют преодолевать трудности, оно от этого не делается хуже, но насильственно внедренное в душу знание непрочно.

(*Главкон.*) Это верно.

(*Сократ.*) Поэтому, друг мой, питай своих детей науками не насильно, а играючи, чтобы ты лучше мог наблюдать природные склонности каждого.

18.2. Законы, 746d–747b

Для хозяйства, для государства, наконец, для всех искусств ничто так не важно и никакая наука не имеет такой воспитательной силы, как занятие числами. Самое же главное то, что людей, от природы вялых и невосприимчивых, это занятие с помощью божественного искусства пробуждает и делает вопреки их природе восприимчивыми, памятливыми и проницательными. Если еще с помощью других законов и занятий удастся изгнать неблагородную страсть к наживе из душ тех, кто собирается усвоить себе на пользу эту науку, то все это вместе было бы прекрасным и надлежащим воспитательным средством.

18.3. Законы, 817e–819d

Афинянин. Итак, для свободных людей остаются еще три науки (μαθήματα): одну составляют вычисления и то, что относится к числам; вторую — измерение длины, плоскости и глубины; третья касается взаимного движения светил и свойственных их природе круговращений. Трудиться над доскональным изучением всего этого большинству людей не надо, но только лишь некоторым. Кому же именно — об этом у нас пойдет речь потом, под самый конец: там это будет уместнее. Однако правильно говорится, что позорно, если большинство людей не имеют необходимых сведений в этой области и пребывают в невежестве; вдаваться же здесь в подробные изыскания нелегко, да и вообще невозможно. Но необходимое отбрасывать здесь нельзя. Тот, кто первым пустил в ход поговорку о боге, а именно что бог никогда не борется с необходимостью, имел, надо думать, в виду божественную необходимость. <…>

Многого недостает человеку, чтобы стать божественным, если он не может распознать, что такое единица, два, три и вообще, что такое четное и нечетное; если он вовсе не смыслит в счете; если он не в состоянии рассчитать день и ночь; если он ничего не знает об обращении Луны, Солнца и остальных звезд. Поэтому большая глупость думать, будто все это не суть необходимые познания для человека, собирающегося обучиться хоть чему-нибудь из самых прекрасных наук. <…>

Свободные люди должны обучаться каждой из этих наук в таком объеме, в каком им обучается наряду с грамотой великое множество детей в Египте. Прежде всего там нашли простой способ обучения детей счету; во время обучения пускаются в ход приятные забавы: яблоки (μήλων) или венки делят между большим или меньшим количеством детей, сохраняя при этом одно и то же общее число; устанавливают последовательность выступлений и группировку кулачных бойцов и борцов; определяют по жребию, как это обычно бывает, кому с кем стать в пару. Есть еще и такая игра: складывают в одну кучу чаши (φιάλας) — золотые, бронзовые, серебряные и из других материалов — столько, чтобы при разделе было целое число[1], и, как я сказал, в процессе игры происходит необходимое ознакомление с числами. Для учеников это полезно, так как пригодится в строю при передвижениях, перестройках и даже в хозяйстве. Вообще это заставляет человека приносить больше пользы самому себе и делает людей более внимательными[2].

[1] О египетских задачах «о яблоках [или об овцах] и чашах» см. примеч. 1 к **2.17**.

[2] Дальше следует фрагмент **7.5**.

18.4. Послезаконие, 976c–979a

Афинянин. Рассмотрим знание, с выходом которого из человеческого обихода и выключением его из ряда других ныне существующих знаний человек превратился бы в самое бессмысленное и безрассудное существо. Знание это не очень трудно заметить. В самом деле, если сравнить, так сказать, одно знание с другим, таким оказывается только то знание, которое дало всему смертному роду число. <...> Мы никогда не стали бы разумными, если бы исключили число из человеческой природы. Дело в том, что душа живого существа, лишенного разума, вряд ли сможет овладеть всей добродетелью в совокупности. Ведь существу, не знакомому с тем, что такое два, три, нечет или чет, совершенно неведомо число как таковое, а потому такое существо вряд ли сможет дать себе отчет в том, что приобретено только путем ощущений и памяти. Правда, это ничуть не препятствует тому, чтобы иметь прочие добродетели — мужество и рассудительность; но тот, кто не умеет правильно считать, никогда не станет мудрым. А у кого нет мудрости, этой самой значительной части добродетели, тот не может стать вполне благим, а значит, и блаженным. Поэтому необходимо класть в основу всего число. Для разъяснения этой необходимости потребовалось бы рассуждение более пространное, нежели все сказанное до сих пор. Впрочем, и теперь будет правильным сказать, что из всех остальных так называемых искусств, разобранных нами, — допустим, что все это действительно искусства, — не осталось бы ни единого, но все они совершенно исчезли бы, если бы вдруг исчезло искусство арифметики.

Бросив взгляд на искусства, кто-нибудь может, пожалуй, предположить, что род человеческий нуждается в числе ради незначительных целей. Правда, важно уже и это. Если же кто примет по внимание божественность и бренность становления, в силу чего в нем можно распознать и священное начало, и действительно сущее число, то окажется, что далеко не всякий может познать все в совокупности число — настолько велико для нас его значение, вызываемое его соприсутствием в нас. Ясно ведь, что и во всем мусическом искусстве надо исчислять движения и звуки, но самое главное то, что число — причина всех благ. Что число не вызывает ничего дурного, это легко распознать, как это вскоре и будет сделано. Ведь чуть ли не любое нечеткое, беспорядочное, безобразное, неритмичное и нескладное движение и вообще все, что причастно чему-нибудь дурному, лишено какого бы то ни было числа. Именно так должен мыслить об этом тот, кто собирается блаженно окончить свои дни.

18.6. Филеб, 51b–52a

Протарх. Ну а если бы кто допустил, что некоторые из [несмешанных удовольствий] истинны, правильным было бы такое предположение?

Сократ. Это удовольствия, вызываемые красивыми, как говорят, красками, фигурами, многими запахами, звуками и всем тем, в чем недостаток незаметен и не связан со страданием, а восполнение заметно и приятно.

Протарх. Почему же, Сократ, мы так говорим?

Сократ. Разумеется, не сразу ясно то, что я говорю; постараюсь, однако, разъяснить. Под красотой фигур (σχημάτων) я пытаюсь понять не то, о чем обычно говорит большинство, т. е. красоту живых существ или картин; нет, я говорю о прямом (εὐθύ) и округлом (περιφερές), в том числе о поверхностях и телах, рождающихся под токарным резцом и построяемых с помощью линеек и угломеров, если ты меня понимаешь. В самом деле, я называю это прекрасным не по отношению к чему-либо, как это можно сказать о других вещах, но вечно прекрасным самим по себе, по своей природе и возбуждающим некие особые, свойственные только ему удовольствия, не имеющие ничего общего с удовольствиями от щекотания. <. . . >

Присоединим к ним еще удовольствия, получаемые от занятий науками (τὰ μαθήματα), поскольку нам представляется, что в них отсутствует жажда познания и поскольку жажда познания изначально не связана с неприятностями[1].

---

[1] Ср. *Аристотель.* Топика (106a37–b1): «Удовольствию от питья противоположно страдание от жажды, но удовольствию от рассмотрения того, что диагональ [квадрата] несоизмерима со стороной, ничего не противоположно».

Библиография

Алимов Н. Г. Величина и отношение у Евклида // Историко-математические исследования. 1955. № 8. С. 573–619.

Башмакова И. Г. Арифметические книги «Начал» Евклида // Там же. 1948. № 1. С. 296–328.

Башмакова И. Г. Лекции по истории математики в древней Греции // Там же. 1958. № 11. С. 225–438.

Ван-дер-Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука: Математика древнего Египта, Вавилона и Греции. М., 1959.

Веселовский И. Н. Египетская наука и Греция // Труды Института истории естествознания и техники (далее — ИИЕТ). 1948. № 2. С. 426–498.

Волошинов А. В. Пифагор: союз истины, добра и красоты. М., 1993.

Выгодский М. Я. «Начала» Евклида // Историко-математические исследования. 1948. № 1. С. 217–295.

Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в Древнем мире. М., 1967.

Гейберг И. Л. Естествознание и математика в классической древности. М.; Л., 1936.

Дубнов Я. С. Ошибки в геометрических доказательствах. М., 1969.

Еганян А. М. Греческая логистика. Ереван, 1972.

Жмудь Л. Я. Пифагор как математик // Историко-математические исследования. 1990. № 32–33. С. 300–324.

Жмудь Л. Я. Пифагор и его школа (ок. 530 — ок. 430 гг. до н. э.). Л., 1990.

Жмудь Л. Я. Наука, философия и религия в раннем пифагореизме. СПб., 1994.

Жмудь Л. Я. Платон — архитектор науки? // Hyperboreus. 1996. № 2. С. 54–85.

Зверкина Г. А. Метод простой итерации: от Вавилона до Ньютона // Историко-математические исследования. 1999. № 3 (38). С. 270–315.

История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: В 3 т. М., 1970.

Лурье С. Я. К вопросу о египетском влиянии на греческую геометрию // Труды ИИЕТ. Сер. 1. Вып. 1. Л., 1933. С. 45–70.

Нейгебауэр О. Лекции по истории античных математических наук. Т.1: Догреческая математика. М.; Л., 1937.

Нейгебауэр О. Точные науки в древности. М., 1968.

Паев М. Е. О приближенном вычислении квадратных корней в древней Греции // Историко-математические исследования. 1965. № 16. С. 219–234.

Паев М. Е. О двух античных историко-математических проблемах // Там же. 1985. № 28. С. 126–153.

Паев М. Е. Решение двух античных проблем. Киев, 1987.

Прасолов В. В. Геометрические задачи Древнего мира. М., 1997.

Раик А. Е. К истории египетских дробей // Историко-математические исследования. 1978. № 23. С. 181–191.

Родин А. В. Вторая книга «Начал» Евклида и «геометрическая алгебра древних» // Философские исследования. 1995. № 1. С. 99–112.

Сабо А. О превращении математики в дедуктивную науку и о начале ее обоснования // Историко-математические исследования. 1959. № 12. С. 321–392.

Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века. М.; Л., 1938.

Щетников А. И. Пифагорейское учение о числе и величине. Новосибирск, 1997.

Щетников А. И. Атомы Платона, алгоритм Теона и понятие «семенного логоса» // Математическое образование. 1999. № 1(8). С. 84–94.

Щетников А. И. Вторая книга «Начал» Евклида: ее математическое содержание и структура // Вторая книга «Начал» Евклида: Текст и интерпретации. Новосибирск, 2001. С. 19–40.

Щетников А. И. Как древние греки доказывали иррациональность $\sqrt{N} : 1$ // Империя математики. 2001. №3.

Янков В. А. Становление доказательства в ранней греческой математике (гипотетическая реконструкция) // Историко-математические исследования. 1997. № 2 (37). С. 200–236.

Яновская С. А. К теории египетских дробей // Труды ИИЕТ. 1947. № 1. С. 269–282.

Acerbi F. Plato: Parmenides 149 a7–c3. A proof by complete induction? // Archive for History of Exact Sciences 2000. N 55. P. 57–76.

Adam J. The nuptial number of Plato: It's solution and significance. London, 1891.

Allen M. J. B. Nuptial arithmetic: Marsilio Ficino's commentary on the fatal number in Book VIII of Plato's Republic. Berkeley, 1994.

Allman G. J. Greek geometry from Thales to Euclid. Dublin, 1889. (Repr.: New York: Arno Press, 1976.)

Artmann B., Schefer L. On Plato's «fairest triangles» (Timaeus 54a) // Historia Mathematica. 1993. N 20. P. 255–264.

Barbara A. Republic 530c–531c: Another look at Plato and the Pythagoreans // American Journal of Philosophy. 1981. N 102. P. 395–410.

Becker O. Eudoxos-Studien. 1) Eine voreudoxishe Proportionlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid // Quellen und Studien zur Geshihte der Math. 1932. Bd 2. S. 313–333; 2) Warum haben die Griechen die Existenz der vierten Proportionale angenommen. 1933. Bd 2. S. 369–387; 3) Die Lehre vom Geraden und Ungeraden in neuten Buch der Euklidishen Elemente. 1935. Bd 3. S. 236–244; 4) Das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten in der griechischen Matematik. 1936. Bd 3. S. 370–388.

Bergh P. Seiten und Diametralzahlen bei den Griechen // Zeitschr. f. Math. u. Phys., hist.-lit. Abt. 1886. N 31. S. 135.

Brumbaugh R. S. Plato's mathematical imagination: The mathematical passages in the Dialogues and their interpretation. Bloomington, 1954. (Repr. 1977).

Demme C. Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes und Hero // Zeitschr. f. Math. u. Phys., hist.-lit. Abt. 1886. N 31. S. 1–27.

Dupuis J. Le nombre géométrique de Platon. Paris, 1881.

Filep L. Pythagorean side and diagonal numbers // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae. 1999. N 15. P. 1–7.

Fossa J., Erickson G. W. The lord over better and worse births // The College Math. Journal. 2001. May.

Fowler D. H. Ratio in early Greek mathematics // Bull. AMS. 1979. N 1. P. 807–846.

Fowler D. H. Book II of Euclid's Elements and a pre-Eudoxan theory of ratio // Archive for History of Exact Sciences. 1980. N 22. P. 5–36; 1982. N 26. P. 193–209.

Fowler D. H. The Mathematics of Plato's Academy: a new reconstruction. Oxford, 1987.

Fowler D. H. Could the Greeks have used mathematical induction? Did they use it? // Physis. 1994. N 31. P. 253–265.

Frajese A. Platone e la matematica nel mondo antico. Rome, 1963.

Frank E. Plato und die sogenannten Pythagoreer. Halle, 1923.

Fritz M. K., von. The discovery of incommensurability by Hippasos of Metapontum // Annals of Math. 1945. N 48. P. 242–264.

Grattan-Guiness I. Numbers, magnitudes, ratios and proportions in Euclid's Elements: how did he handle them? // Historia Mathematica. 1996. N 23. P. 355–375.

Gregory A. Astronomy and observation in Plato's Republic // Studies in History and Philosophy of Science. 1996. N 27. P. 451–471.

Hare R. M. Plato and the mathematicians // New Essays on Plato and Aristotle. London, 1965. P. 21–38.

Hasse H., Scholz H. Die Grundlagenkrisis der griechischen Matematik // Kantstudien. 1928. N 33. S. 4–34.

Hauser G. Geometrie der Griechen von Thales bis Euclid. Luzern, 1955.

Heath T. L. A history of Greek Mathematics. Vol. 1–2. [I: Thales to Euclid; II: Aristarchus to Diophantus] Oxford, 1921. (Repr.: New York, 1981.)

Heath T. L. Greek astronomy. Dent, London, 1932. (Repr.: New York, 1963; New York, 1969.)

Heath T. L. Mathematics in Aristotle. Oxford, 1949. (Repr.: 1970.)

Heilermann. Bemerkungen zu den Archimedischen Näherungswerthen der irrationalen Quadratwurzeln // Zeitschr. f. Math. u. Phys., hist.-lit. Abt. 1881. N 26. S. 121–126.

Herz-Fischler R. A mathematical history of division in extreme and mean ratio. Waterloo (Ontario), 1987.

Hösle V. I fondamenti dell' aritmetica e della geometria in Platone. Milano, 1994.

Høyrup J. Dynamis, the Babylonians, and Theaetetus 147c7–148d7 // Historia Mathematica. 1990. N 17. P. 201–222.

Hultsch F. Die geometrische Zahl in Platon's VIII Buche vom Staate // Zeitschr. f. Math. u. Phys., hist.-lit. Abt. 1882. N 27. S. 41–60.

Itard J. Les livres arithmetiqúes d'Euclide. Paris, 1961.

Karasmanis V. The hypotheses of mathematics in Plato's Republic // Greek Studies in the Philosophy and History of Science. Dordrecht, 1990. P. 121–135.

Kidson P. A metrological investigation // Journal of the Warburg and Courtauld Institutes. 1990. N 53. P. 71–97.

Klein J. Greek mathematical thought and the origin of algebra. Cambridge, 1968. (Repr. New York, 1992.)

Knorr W. R. The evolution of the Euclidean Elements // A study of the theory of incommensurable magnitudes and its significance for Greek geometry. Dordrecht a. o., 1975.

Knorr W. R. Techniques of fractions in Ancient Egypt and Greece // Historia Mathematica. 1982. N 9. P. 133–171.

Knorr W. R. The ancient tradition of geometric problems. Boston, 1986.

Knorr W. R. Textual studies in ancient and medieval geometry. Boston, 1989.

Knorr W. R. Plato and Eudoxus on the planetary motions // J. Hist. Astronom. 1990. N 21 (4). P. 313–329.

Knorr W. R. «Rational diameters» and the discovery of incommensurability // American Mathematical Monthly. 1998. N 105. P. 421–429.

Laird A. G. Plato's geometrical number and the Comment of Proclus. Menasha, 1918.

Lasserre F. The birth of mathematics in the age of Plato. London, 1964.

Lloyd G. E. R. Early Greek science: Thales to Aristotle. New York, 1970.

Michel P.-H. De Pythagore a Euclide. Paris, 1950.

Mohr R. D. The number theory in Plato's Republic VII and Philebus // Isis. 1981. N 72 (264). P. 620–627.

Mourelatos A. Plato's 'real astronomy': Republic 527d–531d // Science and the Sciences in Plato. Delmar, 1980. P. 33–73.

Mueller I. Ascending to problems: astronomy and harmonics in Republic VII // Science and the Sciences in Plato. Delmar, 1980. P. 103–121.

Neugebauer O. 1) Studien zur Geschichte der antiken Algebra // Quellen und Studien zur Geshichte der Math.: I. Bd 2. 1932. S. 1–27; 2) Apollonius-Studien. Bd 2. 1932. S. 215–254; 3) Zur geometrischen Algebra. Bd 3. 1936. S. 245–259.

Neugebauer O. History of ancient mathematical astronomy. Part I–III. Berlin, 1975.

Nesselmann G. H. F. Algebra der Griechen. Berlin, 1843.

Paiow M. Die Mathematische Staatstelle // Archive for History of Exact Sciences 1971. N 8. P. 1–8; 1974. N 12. P. 174–185: 1977. N 18. P. 1–26.

Paiow M. Die Mathematische Theaetetstelle // Archive for History of Exact Sciences. 1982. N 27. P. 87–99.

Pohle W. The mathematical foundations of Plato's atomic physics // Isis. 1971. N 62 (211). P. 36–46.

Russo L. The definitions of fundamental geometric entities contained in Book I of Euclid's Elements // Archive for History of Exact Sciences. 1998. N 52. P. 195–219.

Sachs E. De Theaeteto Atheniensi Mathematico. Berlin, 1914.

Sachs E. Die fünf platonischen Köpfer. Berlin, 1917.

Saito K. Doubling the cube: A new interpretation of its significance for early Greek geometry // Historia Mathematica. 1995. N 22. P. 119–137.

Souilhé J. Étude sur le terme dynamis dans dialogues de Platon. Paris, 1919.

Stenzel J. Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles. Leipzig; Berlin, 1924.

Szabó A. The beginnings of Greek mathematics. Dordrecht a. o., 1978.

Tannery P. Le nombre nuptial dans Platon // Revue philosophique de la France et de l'étranger. Paris, 1876.

Tarán L. Academica: Plato, Philip of Opus and the pseudoplatonic Epinomis. Philadelphia, 1975.

Taylor A. E. Forms and numbers: a study in Platonic metaphysics // Mind. 1926. N. 35. P. 419–440; 1927. N 36. P. 12–33.

Taylor C. C. W. Plato and the mathematicians // PhilosQ. 1968. N 17. P. 193–203.

Thomas I. Selections illustrated the history of Greek mathematics: In 2 vol. Harvard, 1957.

Thorup A. A. Pre-Euclidean theory of proportions // Archive for History of Exact Sciences. 1992. N 45. P. 1–16.

Toeplitz O. Das Verhältnis von Mathematik un Ideenlehre bei Platon // Quellen und Studien zur Geshihte der Math. 1929. Bd 1. S. 3–33.

Unguru S. On the need to rewrite the history of Greek mathematics // Archive for History of Exact Sciences. 1975. N 15. P. 67–114.

Unguru S. Greek mathematics and mathematical induction // Physis. 1991. N 28. P. 273– 289.

Vedova G. C. Notes on Theon of Smyrna // Am. Math. Month. 1951. N 58. P. 675–683.

van der Waerden B. L. Die Postulate und Konstruktionen in des fruhgriechischen Geometrie // Archive for History of Exact Sciences. 1978. N 18. P. 343–357.

van der Waerden B. L. Geometry and algebra in ancient civilizations. Berlin, 1983.

Wangh F. V., Maxfield M. V. Side- and diagonal numbers // Math. Magazine. 1967. N 40. P. 74–83.

Waterhouse W. S. The discovery of the regular solids // Archive for History of Exact Sciences. 1972–1973. N 9. P. 212–221.

Weber O. De numero Platonis. Cassel, 1862.

Zhmud L. Some notes on Philolaus and the Pythagoreans // Hyperboreus. 1998. N 4. P. 243–270.