А. И. ЩЕТНИКОВ

АЛГОРИТМ НИКОМАХА РАЗВОРАЧИВАНИЯ ВСЕХ ЧИСЛОВЫХ ОТНОШЕНИЙ ИЗ ОТНОШЕНИЯ РАВЕНСТВА

1. Никомах Геразский и его сочинения

Никомах Геразский, живший в первой половине II в. н. э., — один из видных представителей неопифагореизма — развившейся в русле среднего платонизма философской доктрины, в которой основные положения платоновской школы соединялись с пифагорейским учением о числе как начале всего сущего[1].

До наших дней дошли четыре сочинения Никомаха — два целиком и два частично. Полностью сохранились «Введение в арифметику»[2], в котором излагается пифагорейское числовое учение, и «Руководство по гармонике», представляющее собой описание основ пифагорейской музыкальной теории. В третьем сочинении Никомаха «Теологумены арифметики» дан очерк пифагорейского числового символизма. Никомах написал также «Жизнь Пифагора», которую затем использовали в аналогичных биографических сочинениях Порфирий и Ямвлих.

Популярность «Введения в арифметику» в последующие времена была огромной. Это сочинение выступало своего рода образцом, по которому в поздней античности и в Средние века строилось изложение теоретической «философской» арифметики. Комментарии на него писали такие авторы, как Ямвлих в конце III столетия[3] и Иоанн Филопон в VI столетии[4]. Вскоре после смерти Никомаха «Введение в арифметику» было переведено на ла-

---

[1] *Диллон Дж.* Средние платоники: 80 г. до н. э. — 220 н. э. СПб., 2002.

[2] *Nicomachus Gerasenus*. Introductionis arithmeticae / Ed. R. Hoche. Leipzig, 1866; *Nicomachus of Gerasa*. Introduction to Arithmetic / Transl. by M. L. D'Ooge. With Studies in Greek arithmetic by F. E. Robbins and L. Ch. Karpinski. New York; London, 1926 (reprinted: New York, 1972).

[3] *Philoponus Iohannus*. In Nicomachi Arithmeticam introductionem / Ed. R. Hoche. Part I–II. Wesel, 1864–1865; Part III. Berlin, 1867.

[4] *Iamblichus*. In Nicomachi Arithmeticam introductionem / Ed. U. Klein post H. Pistelli. Leipzig, 1894 (reprinted: Michigan, 1998).

тынь Апулеем, но до наших дней этот перевод не дошел. Боэций в начале VI столетия перевел его на латынь еще раз и издал его в своей редакции. Этот перевод Боэция использовался в средневековых университетах в качестве учебника[5]. На Востоке «Введение...» переводилось на сирийский и арабский языки; до наших дней дошел арабский перевод Сабита ибн Корры, сделанный в конце IX столетия.

2. Краткий обзор «Введения в арифметику»

«Введение в арифметику» состоит из двух книг. Разбивка на книги произведена чисто механически и не соответствует какому-либо смысловому членению. В содержательном плане в книге выделяются следующие части.

1. **Философское предисловие.** Значение математических наук для изучения философии (кн. I, гл. 1). Деление математических предметов на непрерывные величины и дискретные множества (гл. 2). Четверка пифагорейских математических наук: арифметика, геометрия, музыка, сферика. Назначение этих наук в пифагорейской и платоновской традиции (гл. 3). Арифметика как самая старшая из математических наук (гл. 4–5). «Научное» число как божественный прообраз космической гармонии (гл. 6).

2. **Арифметика «абсолютных количеств».** Подразделение чисел на чётные и нечётные (гл. 7). Подразделение чётных чисел на чётно-чётные, чётно-нечётные и нечётно-чётные (гл. 8–10). Числа простые («первые»), составные и взаимно простые («первые между собой»). Решето Эратосфена для получения простых чисел. Алгоритм последовательного взаимного вычитания для отыскания наибольшей общей меры двух чисел (гл. 11–13). Подразделение чисел на избыточные, недостаточные и совершенные. Прием построения чётных совершенных чисел (гл. 14–16).

3. **Арифметика «относительных количеств».** Пять видов отношения большего к меньшему и пять видов обратного отношения меньшего к большему (гл. 17–23.3). Первичность равенства по отношению к неравенству как основание этических добродетелей

---

[5] *Boetius.* De institutione arithmetica. De institutione musica / Ed. G. Friedlein. Leipzig, 1867.

(гл. 23.4–5). Алгоритм разворачивания всех числовых отношений из отношения равенства (кн. I, гл. 23.6 — кн. II, гл. 2). Порождение непрерывных числовых прогрессий (гл. 3–4). Составные отношения (гл. 5).

4. **Фигурные числа.** Многоугольные числа (гл. 6–12). Пирамидальные числа, включая усеченные пирамиды (гл. 13–14). Телесные числа, получаемые произведением трех множителей; их подразделение на виды (гл. 15–16). Плоские числа, получаемые произведением двух множителей; квадратные, гетеромекные и продолговатые числа (гл. 17). Сферические или возвратные числа (гл. 17.7). Связь квадратных и гетеромекных чисел (гл. 18–20).

5. **Пропорции.** Три основных пропорции: арифметическая, геометрическая и гармоническая (гл. 21–25). Связь этих пропорций и музыкальных интервалов (гл. 26–27). Семь других пропорций, изобретенных позднейшими математиками (гл. 28). Музыкальная гармония (гл. 29).

3. «Введение в арифметику» как философская пропедевтика

«Введение в арифметику» представляет собой краткую пифагорейскую числовую энциклопедию. Изложение Никомаха — обзорное, полностью лишенное доказательств. Этим оно принципиально отличается от пифагорейских арифметических книг, включенных в корпус «Начал» Евклида (VII–IX книги), или от «Книги о многоугольных числах» Диофанта Александрийского. Никомах не является математиком, открывающим и доказывающим новые истины; его взгляд на числа и отношения между ними — чисто философский. Число интересует Никомаха в качестве упорядоченной основы всего сущего; оно и есть такое сущее в собственном смысле этого слова.

Основной принцип пифагорейского учения о числах — это *принцип упорядоченного и единообразного разворачивания многого из единого*. Характерный тому пример — выстраивание плоских многоугольных чисел путем последовательного «фигурного» прибавления друг к другу членов некоторой арифметической прогрессии, начинающейся с единицы (на рис. 1 изображено начало последовательности квадратных чисел, получающихся путем последовательного сложения нечётных чисел). В то время как количество входящих в многоугольное число единиц неограниченно нарастает, форма числа остается неизменной, и эта неизменность формы обеспечивает единообразный рост количества. Поэтому треугольное, четырехугольное, пятиугольное и т. д. число как вид может расти беспредельно, но сама эта беспредельность схвачена в конечном и замкнутом видовом определении числа.

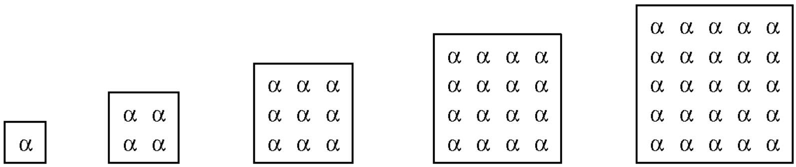

Рис. 1

Другая важная роль арифметики в системе античного платонизма — пропедевтическая. Все авторы этой традиции, начиная с Платона и заканчивая Проклом, рассматривали изучение математических наук как основной этап философского восхождения от вещей чувственно созерцаемых и находящихся в непрестанном изменении к вещам нематериальным, вечным и неизменным, постижимым единственно в разумении и рассуждении. Как говорит сам Никомах, «ясно, что эти науки суть лестницы и мосты, которые переносят наши умы от воспринимаемого чувством и мнением к постижимому мыслью и знанием; и от знакомых и привычных нам с детства материальных и телесных вещей — к непривычным и чуждым нашим чувствам, однако их нематериальность и вечность родственны нашим душам и, что еще важнее, заключенному в них разуму» (Введение I 6, 6).

Эта пропедевтическая установка прямо зафиксирована в названии еще одного обзорного сочинения по пифагорейским математическим наукам, автор которого младший современник Никомаха — Теон Смирнский: «Изложение математических вещей, полезных при чтении Платона»[6]. И название трактата Никомаха будет правильнее переводить не как «Введение в арифметику» (ведь

[6] *Theon of Smyrna.* Matematics useful for understanding Plato / Trans. by R. and D. Lawlor; ed. by C. Toulis. San Diego, 1978.

никакой «высшей арифметики» за ним не следует), а как «Арифметическое введение» [в платоновскую философию].

4. Классификация числовых отношений

Для понимания дальнейшего следует предварительно рассмотреть классификацию соотнесенных количеств, изложенную у Никомаха Геразского и Теона Смирнского. Согласно этой классификации, «для соотнесенного количества наивысшим родовым делением является деление на равенство и неравенство». При этом «неравное подлежит разделению, и одно будет большим, а другое меньшим». И далее, «большее подразделяется на пять видов, каковые суть многократное (*πολλαπλάσιον*), сверхчастное (*ἐπιμόριον*), сверхмногочастное (*ἐπιμερές*), многократно-и-сверхчастное (*πολλαπλασιεπιμόριον*), многократно-и-сверхмногочастное (*πολλαπλασιεπιμερές*)» (Введение I 17, 2–7).

Эти пять видов отношения большего к меньшего могут быть определены следующим образом.

1. Многократное отношение — когда меньший член отношения укладывается в большем целое число раз. В общем виде это отношение представимо как $m : 1$.

2. Сверхчастное отношение — когда меньший член укладывается в большем один раз, а образовавшийся остаток нацело укладывается в меньшем члене. В общем виде это отношение $(n + 1) : n$.

3. Сверхмногочастное отношение — когда меньший член укладывается в большем один раз, и процедура взаимного вычитания ещё не заканчивается на следующем шаге. В общем виде это отношение $(n + k) : n$, где $1 < k < n$, и k взаимно просто с n.

4. Многократно-и-сверхчастное отношение — когда меньший член укладывается в большем несколько раз, а образовавшийся остаток нацело укладывается в меньшем члене. В общем виде это отношение $(mn + 1) : n$.

5. Многократно-и-сверхмногочастное отношение — когда меньший член укладывается в большем несколько раз, и процедура взаимного вычитания еще не заканчивается на следующем шаге. В общем виде это отношение $(mn + k) : n$, где $1 < k < n$, и k взаимно просто с n.

Что касается отношения меньшего к большему, то оно образуется из отношения большего к меньшему перестановкой членов.

Конечно, вся эта классификация соотнесенных количеств охватывает только отношения натуральных чисел и отношения соизмеримых величин, представимые натуральными числами; отношения несоизмеримых величин находятся за ее пределами.

5. «Алгоритм Никомаха»: перевод текста

В главе XXIII книги I и главах I–II книги II Никомах описывает примечательный алгоритм, позволяющий единообразно и систематически разворачивать все числовые отношения из отношения равенства «как из матери и корня», а также сводить их к отношению равенства «как элементарной основе для всякого неравенства». Говоря об этом алгоритме, мы будем называть его в дальнейшем «алгоритмом Никомаха», хотя сам Никомах, безусловно, не является его автором (так же как и Евклид не является автором «алгоритма Евклида» для отыскания наибольшей общей меры двух чисел или величин).

Ниже приведен перевод соответствующего фрагмента текста (который в сочинении Никомаха следует непосредственно за описанием классификации соотнесенных количеств). Перевод сделан по критическому изданию «Introductionis arithmeticae»; мы пользовались также английским переводом[7].

Книга I, глава XXIII

> [4] И этот стройный и необходимый путь к познанию природы вселенной ясным и недвусмысленным образом показывает нам, что прекрасное, определенное и познаваемое первично по своей природе в сравнении с неопределенным, неограниченным и безобразным; и далее, что части и виды неограниченного и неопределенного приобретают благодаря первому свою форму и границы, и находят подобающий им порядок и расположение, и делаются доступными измерению, и приобретают некоторое подобие и одноименность. Ведь понятно, что разумная часть души приводит в порядок

[7] *Nicomachus of Gerasa*. Introduction to arithmetic.

неразумную часть, ее порывы и влечения, связанные с двумя видами неравенства, и посредством размышления подводит ее к равенству и тождеству.

[5] А для нас из этого уравнивания прямо вытекают так называемые этические добродетели, каковые суть благоразумие, мужество, мягкость, самообладание, выдержка и подобные им качества.

[6] Теперь нам нужно как следует рассмотреть природу этой теоремы, согласно которой можно доказать, что все виды неравенства и их подразделения сводятся к первому и единственному равенству, как к их матери и корню.

[7] Пусть нам даны равные числа по три, и первыми будут единицы, затем три двойки, затем тройки, четверки, пятерки, и сколь угодно далее. И из них, прямо-таки по божественному, а не по человеческому повелению, а иначе сказать — по самой природе, первыми возникают многократные, а из них сперва двукратные, затем трехкратные, затем четырехкратные, затем пятикратные, и этот порядок мы можем продолжать до бесконечности. Вторыми же — сверхчастные, и здесь сначала появляется первый вид, полуторное, за ним эпитритное, а за ним прямо по порядку идут превышающее на четвертую долю, на пятую долю и далее аналогично до бесконечности. Третьими — сверхмногочастные, и здесь сначала появляются сверхдвухчастные, а прямо за ними сверхтрехчастные, сверхчетырехчастные, сверхпятичастные, и сколь угодно далее в том же порядке.

[8] И тебе нужны такие правила, которые будут подобны неизменным и нерушимым законам природы, и по которым все вышеназванное будет расходиться во все стороны от равенства без каких-либо исключений. И эти правила таковы: «Положи первый член равным первому, второй равным сумме первого и второго, а третий — сумме первого, удвоенного второго и третьего». И если ты будешь действовать по этому закону, ты сначала получишь по порядку все виды многократного, исходя из трех членов равенства, и они взойдут и вырастут без твоей помощи и участия; причем непосредственно из равенства возникнет двукратное, затем из двукратного трехкратное, затем из трехкратного четырехкратное, а из него пятикратное, и так далее в том же порядке.

[9] А из этих многократных, если переставить их члены, прямо-таки по природной необходимости применением этих же трех правил возникают сверхчастные, причем не

случайно и беспорядочно, но в присущей им последовательности. И из переставленного первого двукратного возникает первое полуторное, из второго трехкратного — второе в своем порядке эпитритное, и превосходящее на четверть из четырехкратного, и далее названные по именам следующих.

[10] И опять, из этих упорядоченных сверхчастных, если переставить их члены, естественно возникают сверхмногочастные: их полуторного — сверхдвухчастное, из эпитритного — сверхтрехчастное, из превосходящего на четверть — сверхчетырехчастное, и далее до бесконечности по этой же аналогии.

[11] А если члены не переставлять, то прямо из этих же упорядоченных сверхчастных по тем же правилам возникают многократно-и-сверхчастные: двукратное с половиной из первого полуторного, двукратное с третью из второго эпитритного, двукратное с четвертью из третьего превосходящего на четверть, и так далее.

[12] Итак, из сверхчастных с перестановкой членов возникают сверхмногочастные, а без перестановки — многократно-и-сверхчастные, и это происходит одним и тем же способом и по одним и тем же правилам, но либо с сохранением порядка членов, либо с обращением его, и получившиеся числа показывают остальные сопряжения.

[13] Описанное выше упорядоченное производство, которое идет либо в прямом порядке, либо с перестановкой членов, мы рассмотрим теперь на примерах.

[14] Из сопряжения и пропорции полуторного, переставленного так, чтобы оно начиналось с большего члена, составляется сверхмногочастное сопряжение с превышением на 2/3; а если оно прямо начинается с меньшего члена, то получается многократно-и-сверхчастное сопряжение, а именно двукратное с половиной. К примеру, из 9, 6, 4 получается 9, 15, 25 либо 4, 10, 25. Из эпитритных, когда они начинаются с большего члена, в сверхмногочастном получается превышающее на 3/4, а когда с меньшего — двукратное с третью. К примеру, из 16, 12, 9 получается 16, 28, 49 либо 9, 21, 49. Из превышающих на четверть, когда они начинаются с превосходящего члена, в сверхмногочастном получается превышающее на 4/5, а когда с меньшего члена, то во многократно-и-сверхчастном получается двукратное с четвертью. К примеру, из 25, 20, 16 получается 25, 45, 81 либо 16, 36, 81.

[15] И в том, что получается обоими способами, последний член всегда является одним и тем же квадратом, а первый оказывается наименьшим, и оба крайних всегда являются квадратами.

[16] А относящиеся к другим видам сверхмногочастные или многократно-и-сверхмногочастные получаются иным образом из сверхмногочастных. Так, из превышающих на 2/3, когда они начинаются с меньшего члена, получаются двукратные и превышающие на 2/3; а когда они начинаются с большего члена — превышающие на 3/5. К примеру, из 9, 15, 25 получается либо 9, 24, 64, либо 25, 40, 64. А из превышающих на 3/4, когда они начинаются с меньшего члена, получаются двукратные и превышающие на 3/4; а когда они начинаются с большего члена — превышающие на 4/7. К примеру, из 16, 28, 49 получаются либо 16, 44, 121, либо 49, 77, 121. И также из превышающих на 4/5, каковы 25, 45, 81, когда они начинаются с меньшего члена, получаются двукратные и превышающие на 4/5, каковы 25, 70, 196: а когда они начинаются с большего члена, получаются превышающие на 5/9, каковы 81, 126, 196. И аналогичные согласованные результаты можно продолжать до бесконечности.

Книга II, глава I

[1] Элементом называется и есть то последнее, из чего все слагается и на что все разлагается (к примеру, буквы — это элементы звучащей речи, ибо из них слагается произносимая речь и на них она в итоге разлагается; а звуки — элементы мелодии, ибо из них она изначально слагается и на них разлагается; а так называемыми общими элементами всего космоса выступают четыре простых тела: огонь, вода, воздух и земля, — ведь из них как из первых состоит вся природа, и на них же мы ее в конце концов мысленно разлагаем). Мы показали, что равенство представляет собой элемент для соотнесенного количества; а для количества самого по себе первоначальными элементами будут единица и двойка, из которых как их последних все слагается до бесконечности и на которые мы мысленно все разлагаем.

[2] Мы также показали, что распространение и нарастание неравного идет от равенства, и что оно прямо упорядочено по всем сопряжениям согласно трем правилам. И чтобы показать, что равенство поистине является элементом,

осталось продемонстрировать, что разложение завершается на нем же. Рассмотрим для этого нашу процедуру.

Книга II, глава II

[1] Представь себе три члена в любом сопряжении и пропорции, будь оно многократным, или сверхчастным, или сверхмногочастным, ими многократно-и-сверхчастным, или многократно-и-сверхмногочастным, лишь бы только средний член относился к меньшему так же, как больший к среднему. Вычти меньший член из среднего, будь он по порядку первым или же последним, и установи меньший член первым членом твоей новой прогрессии; на второе место установи то, что осталось от второго члена после вычитания; а потом вычти сумму нового первого члена и удвоенного нового второго члена из оставшегося, наибольшего из данных членов, и установи разность третьим членом, — и получившиеся числа будут иметь некоторое новое сопряжение, более примитивное по природе.

[2] И если ты снова таким же способом произведешь вычитание этих трех членов, ты обнаружишь, что они преобразуются в три новых члена более примитивного вида; и ты найдешь, что эта последовательность будет всегда продолжаться, пока не дойдет до равенства. А отсюда с необходимостью становится очевидным, что равенство — это элемент для соотнесенного количества.

6. Диаграмма Никомаха для трехчленных сопряжений

Описанный Никомахом алгоритм преобразует трехчленную геометрическую прогрессию (Никомах называет ее «сопряжением и пропорцией») в две новые трехчленные геометрические прогрессии по следующему правилу: *«Положи первый член равным первому, второй равным сумме первого и второго, а третий — сумме первого, удвоенного второго и третьего»*. При этом одна прогрессия получается непосредственно из исходной, а другая — из исходной при перестановке ее членов в обратном порядке.

Дадим здесь обоснование этого правила. Всякая несократимая трехчленная геометрическая прогрессия имеет вид $a^2 : ab : b^2$, где НОД $(a, b) = 1$ (Евклид, Начала, VIII 2). Действие алгоритма будем изображать графически, в виде процедуры с одним входом и двумя выходами (рис. 2). На левом выходе исходная прогрессия преобразуется по правилу Никомаха в трехчленное сопряжение $a^2 : (a^2 + ab) : (a^2 + 2ab + b^2)$, что после группировки членов дает $a^2 : a(a + b) : (a + b)^2$; и это новое сопряжение тоже является геометрической прогрессией. Соответственно на «правом» выходе при перестановке членов образуется трехчленная геометрическая прогрессия $b^2 : b(a + b) : (a + b)^2$.

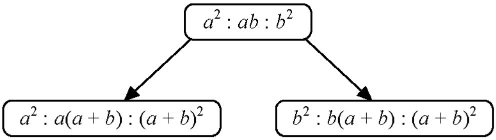

Рис. 2

Подадим на вход алгоритма Никомаха «корневую» тройку из трех единиц и рассмотрим дихотомическое дерево результатов. На рис. 3 изображены несколько уровней левой ветви этого дерева; правая ветвь устроена симметрично, и показывать ее на схеме нет необходимости.

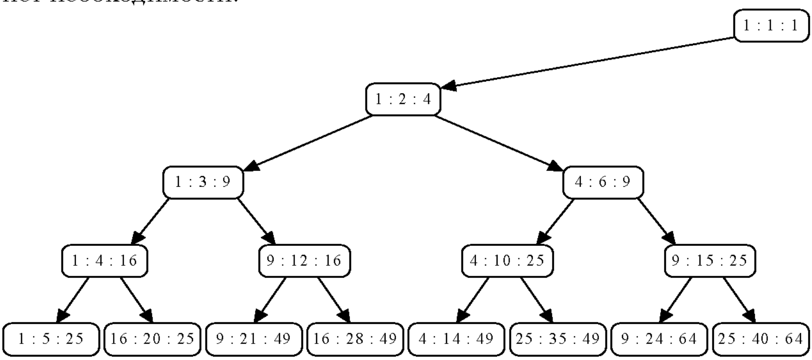

Рис. 3

7. Реконструкция «примитивной» формы алгоритма Никомаха

Теперь мы опишем алгоритм Никомаха в максимально рафинированном виде, не загроможденном дополнительными деталями, а также сформулируем относящуюся к нему фундаментальную теорему и докажем ее. Сам Никомах рассматривает числовые тройки; мы же упростим ситуацию и будем рассматривать числовые пары, задающие отношение соседних членов в трехчленных геометрических прогрессиях. Кроме того, мы не будем переставлять члены в получающихся числовых парах (в отличие от Никомаха, который переставлял члены в своих сопряжениях так, чтобы первый член всегда был наименьшим).

В такой интерпретации алгоритм Никомаха превращается в вычислительную процедуру с одним входом и двумя выходами, преобразующую упорядоченную пару натуральных чисел в две другие упорядоченные пары натуральных чисел по следующему правилу: *«на левом выходе левое число равно сумме чисел на входе, а правое число равно правому числу на входе; на правом выходе левое число равно левому числу на входе, а правое число равно сумме чисел на входе»* (рис. 4).

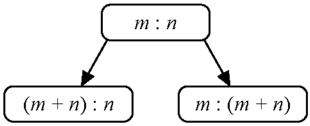

Рис. 4

Подадим на вход алгоритма Никомаха «корневую» пару из двух единиц и рассмотрим дихотомическое дерево результатов (мы будем называть это дерево «диаграммой Никомаха»). На рис. 5 изображены несколько уровней левой ветви этого дерева.

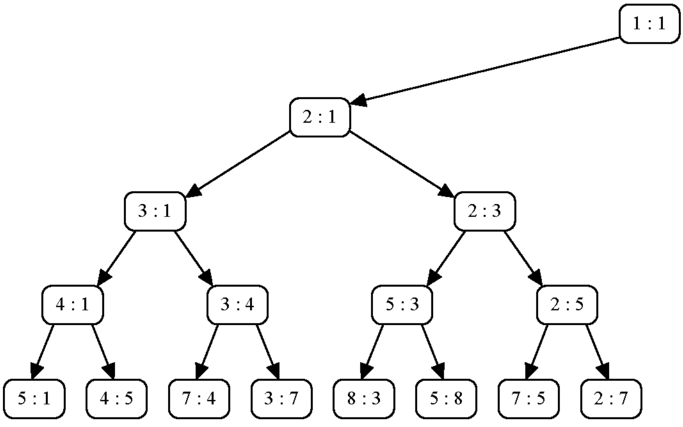

Рис. 5

Для графического представления алгоритма Никомаха очень удобна схема «последовательного наращивания квадратов». Представим корневое отношение 1 : 1 единичным квадратом. А далее на каждом шаге алгоритма Никомаха будем приставлять к уже имеющемуся прямоугольнику квадрат по длине на левом выходе либо квадрат по ширине на правом выходе: порождаемые при этом отношения суть отношения сторон новых получившихся при этом прямоугольников (рис. 6).

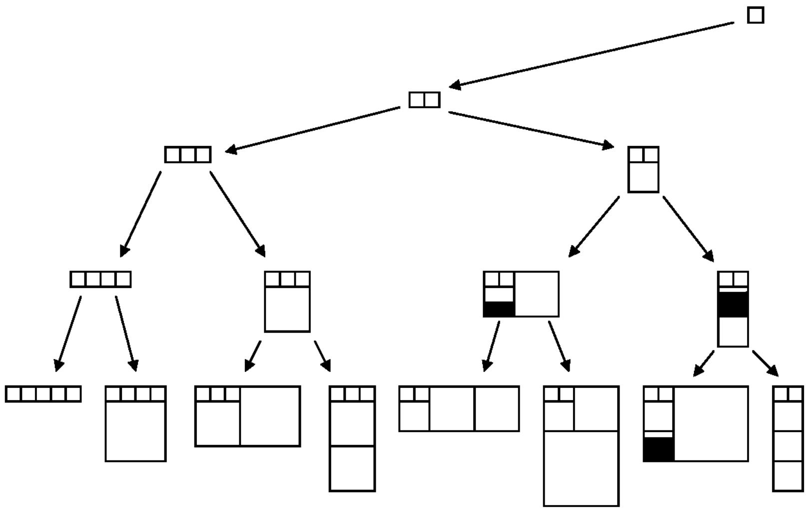

Рис. 6

8. Фундаментальная теорема

Основное свойство диаграммы Никомаха задается следующей теоремой.

Теорема. Диаграмма Никомаха устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех узлов дихотомического дерева и множеством всех упорядоченных пар взаимно простых чисел.

Лемма. Каждому шагу диаграммы Никомаха вверх по направлению к корню соответствует одно элементарное вычитание меньшего числа из большего в алгоритме Евклида для поиска наибольшей общей меры двух чисел.

Доказательство теоремы. Сначала покажем, что всякие два числа, стоящие в произвольном узле диаграммы Никомаха, взаимно простые. В самом деле, применяя к этим числам алгоритм Евклида, мы будем последовательно подниматься вверх по диаграмме вплоть до корневого узла, в котором находится отношение 1 : 1. Получается, что наибольшей общей мерой чисел рассматриваемого узла будет единица, что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что всякая упорядоченная пара взаимно простых чисел стоит в одном и только в одном узле диаграммы Никомаха. Действительно, для каждой упорядоченной числовой пары алгоритм Евклида дает последовательность взаимных вычитаний, которую можно описать на языке перемещений по диаграмме Никомаха вверх, к корню: «q_0 шагов вправо; q_1 шагов влево, ... , q_{n-1} шагов вправо, q_n — 1 шагов влево, стоп». (Здесь q_0 может быть равно нулю; если n чётное, то последние q_n — 1 шагов делаются влево, если же n нечётное, то последние q_n — 1 шагов делаются вправо.) Эта цепочка шагов, обращенная назад от корня («q_n — 1 шагов вправо, q_{n-1} шагов влево, ... , q_1 шагов вправо, q_0 шагов влево, стоп») однозначно определяет местоположение данной числовой пары на диаграмме, что и требовалось доказать.

К примеру, несократимое отношение 47 : 14 с помощью алгоритма Евклида разлагается в непрерывную дробь

$$\frac{47}{14} = 3 + \frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4}.$$

Последовательность неполных частных 3; 2, 1, 4 задает движение от отношения 47 : 14 к корневому отношению 1 : 1 вверх по цепочке «3 шага вправо, 2 шага влево, 1 шаг вправо, 3 шага влево, стоп». Поэтому от корневого отношения 1 : 1 к отношению 47 : 14 ведет обращенная цепочка «3 шага вправо, 1 шаг влево, 2 шага вправо, 3 шага влево, стоп» (рис. 7).

Следствие. Подадим на вход алгоритма Никомаха «корневую» пару из двух двоек, двух троек, двух четверок и т. д. При этом на соответствующей диаграмме Никомаха будут построены все упорядоченные пары натуральных чисел, для которых наибольшей общей мерой будет соответственно двойка, тройка, четверка и т. д.

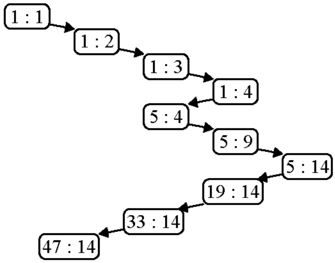

Рис. 7

9. Геометрическое представление алгоритма Никомаха для трехчленных сопряжений

Чтобы понять, почему Никомах рассматривает трехчленные сопряжения, а не более простые в обращении двучленные числовые отношения, вспомним о пифагорейской геометрической интерпретации трехчленной геометрической прогрессии, известной по «Тимею» Платона:

«Два члена сами по себе не могут быть хорошо сопряжены без третьего, ибо необходимо чтобы между одним и другим родилась некая объединяющая их связь. Прекраснейшая же из связей такая, которая в наибольшей степени единит себя и то, что связано, и задачу эту наилучшим образом выполняет пропорция» (31b8–c4).

Описанную Никомахом процедуру построения новых трехчленных сопряжений мы изобразим теперь графически (рис. 8), пользуясь приемами «геометрической алгебры», изложенными во II книге «Начал» Евклида[8].

Представим исходное трехчленное сопряжение в виде двух квадратов a^2 и b^2, построенных на сторонах «сопрягающего» прямоугольника ab. В новых сопряжениях меньший член остается тем же квадратом a^2 или b^2, а в качестве большего члена берется квадрат $(a + b)^2$; при этом «сопрягающим» членом оказывается в первом случае прямоугольник $a(a + b)$, во втором случае прямоугольник $b(a + b)$.

[8] *Щетников А.И.* Вторая книга «Начал» Евклида: ее математическое содержание и структура // Вторая книга «Начал» Евклида: текст и интерпретации. Новосибирск, 2001. С. 19–40.

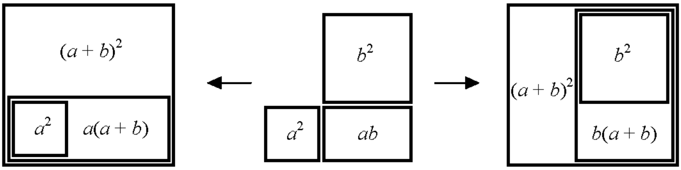

Рис. 8

Такие трехчленные сопряжения могут быть помещены теперь на «схему наращивания квадратов» (рис. 9). Здесь каждый отдельный чертеж рис. 6 достроен до квадрата, и теперь три члена сопряжения суть (a) только что прибавленный малый квадрат, (b) возникший при этом прибавлении прямоугольник, (c) большой квадрат. И если на рис. 6 двучленное отношение задавалось числами единичных отрезков, укладывавшихся по длине и ширине получавшихся прямоугольников, то теперь трехчленное сопряжение задается числами единичных квадратов, укладывающихся в соответствующие квадраты и прямоугольники.

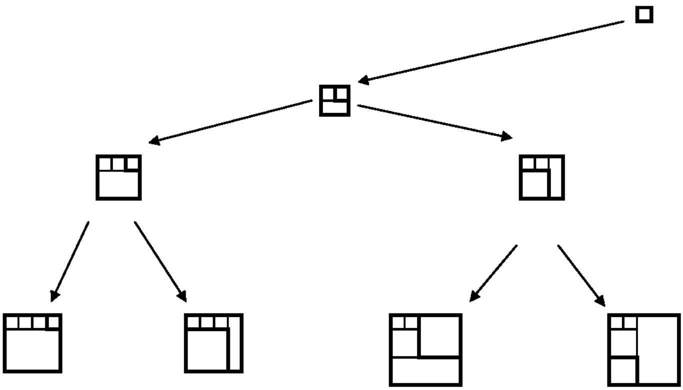

Рис. 9

10. Некоторые замечания

Теперь следует объяснить, почему Никомах не мог быть автором описанного здесь алгоритма. Прежде всего обращает на себя внимание популяризующее, обзорное изложение Никомаха и полное отсутствие в его тексте каких-либо доказательств. По отношению к алгоритму таковых доказательств требуется как минимум два. Во-первых, Никомах не доказывает, что на каждом шаге в направлении от корня трехчленная геометрическая пропорция будет вновь преобразовываться в геометрическую пропорцию. Во-вторых, он сообщает, что всевозможные трехчленные пропорции «будут расходиться во все стороны от равенства без каких-либо исключений», но не приводит тому никакого доказательства, а лишь иллюстрирует начальные этапы такого расхождения несколькими примерами. Сообщает он и то, что при обратном спуске мы дойдем от любой трехчленной пропорции к элементарной пропорции равенства, но опять-таки никакого обоснования тому не приводит. Сама конструкция алгоритма безусловно выдает глубокий и изощренный ум его автора; чтобы изобрести такую конструкцию, нужно было мыслить математически, а Никомах всего лишь философствует о математике.

Ямвлих в «Комментарии к Арифметике Никомаха» описывает алгоритм Никомаха для трехчленных пропорций достаточно подробно и многословно (40_{22}–51_{20}). В конце этого описания он даже переходит от трехчленных пропорций к их корневым числам, что соответствует нашей построенной выше «примитивной» диаграмме. Однако он ничего не говорит о процедуре сведения любого отношения к отношению равенства, и уже даже не намекает на возможность доказательств. Его изложение лишено и присущего Никомаху пифагорейского пафоса; в целом оно не дает для нас ничего нового.

К сожалению, издания переложения «Введения» Боэцием[9] и комментария Иоанна Филопона[10] были для меня недоступны. В сочинениях же позднейших средневековых авторов какие-либо ссылки на «алгоритм Никомаха», по-видимому, отсутствуют. Во всяком случае, в подробном и тщательно составленном обзоре[11] по учению о числе на средневековом Востоке ни одного упоминания о таких ссылках нет. А ведь «Введение в арифметику» на протяжении всего средневековья в странах Востока и в Европе считалось столь же основополагающим сочинением в арифметике, как «На-

[9] *Boetius*. De institutione arithmetica. De institutione musica.

[10] *Philoponus Iohannus*. In Nicomachi Arithmeticam introductionem.

[11] *Матвиевская Г.П.* Учение о числе на средневековом Востоке. Ташкент, 1967.

чала» Евклида в геометрии. Думается, что одной из причин тому была некоторая невнятность изложения Никомаха: в результате вычленить описание алгоритма, находящееся на стыке двух книг и зажатое между классификацией числовых отношений и принципом построения непрерывных числовых пропорций, и понять его самостоятельную математическую значимость оказалось не так-то просто.

11. Алгоритм Никомаха как возможная математическая основа «неписаного учения» Платона

Согласно предположению, выдвинутому в начале 1960-х годов представителями тюбингенской историко-философской школы Г.-И. Кремером[12] и К. Гайзером[13], пифагорейская система двух бытийных начал — единицы как начала тождества и формы и неопределенной двоицы как принципа инаковости и материи — была положена Платоном в основу его неписаного учения, изустно передававшегося в Академии. Обсуждение этих работ см. также в статье Т. В. Васильевой[14]; собрание текстов, призванных проиллюстрировать неписаное учение Платона, дано в переводе на английский язык в приложении к книге Дж. Финдлея[15].

Большая часть античных упоминаний о «неписаных учениях» Платона так или иначе связана с лекцией Платона «О благе». Аристоксен во второй книге «Гармоники» пишет:

«Вот что, по словам Аристотеля, испытали многие, слышавшие лекцию Платона *О благе*: все они пришли узнать о том, что у людей называется благом, — о богатстве, здоровье, силе, вообще о каком-нибудь необычайном счастье. Но это оказались речи о математических науках и числах, о геометрии и астрономии, и наконец о том, что благо есть единое. И речи эти показались им парадоксальными, поэтому одни отнеслись к этому с пренебрежением, другие поносили его» (39_8–40_4).

---

[12] *Krämer H. J.* Arete bei Platon und Aristoteles: Zum Wesen und zur Geschichte der platonischen Ontologie. Heidelberg, 1959.

[13] *Gaiser K.* Platons Ungeschriebene Lehre. Stuttgart, 1963.

[14] *Васильева Т. В.* Неписаная философия Платона // Вопросы философии. 1977. № 11. С. 152–160.

[15] *Findley J. N.* Plato. The Written and Unwritten Doctrines. London, 1974.

Симпликий в своем «Комментарии к Физике Аристотеля» пишет следующее: «Александр [Афродизийский] сообщает, что согласно Платону, начала всего и самих идей — это единое и неопределенная двоица, которую он называл большим и малым, как об этом упоминает Аристотель в сочинении *О благе*. А тот получил кое-что от Спевсиппа, Ксенократа и от других, присутствовавших на лекции Платона *О благе*; и все они записали и сохранили его мнение, и сообщили, что он пользовался такими началами. И то, что Платон назвал единое и неопределенную двоицу началом всего, весьма правдоподобно (ведь это учение пифагорейцев, а Платон во многом следовал за пифагорейцами), и он сделал неопределенную двоицу также началом идей, называя ее большим и малым, чтобы обозначить так материю» (151_{6-15}).

В другом месте Симпликий еще раз возвращается к этой теме: «Платон называл единое и так называемую неопределенную двоицу первыми началами чувственных вещей. Он также утверждал, что неопределенная двоица является умопостигаемой, назвав ее беспредельным; и он положил началами большое и малое, также назвав их беспредельным в своей лекции *О благе*, как об этом сообщают Аристотель, Гераклид и Гестий и другие друзья Платона, присутствовавшие там и записавшие эти загадочные речи» (453_{25-29}).

Александр Афродизийский в «Комментарии к Метафизике Аристотеля» (987b33) также ссылается на книгу Аристотеля *О благе*: «Он сказал, что начала чисел суть монада и диада. И поскольку среди чисел есть единица и идущие за ней, а эти последние бывают многим и немногим, и первое за единицей содержится в них, он установил ее началом многого и немногого. Но за единицей первой идет двойка, и в ней заключено как многое, так и немногое: ведь двойное — это многое, а половинное — немногое, и они оба содержатся в двойке. А она противоположна единице, поскольку делима, а единица неделима. И он пытался показать, что равенство и неравенство — это начала всего сущего и противоположного ему (он ведь доискивался, как свести всё к самому простому). Равенство он связал с монадой, а неравенство с избытком и недостатком: ведь неравенство бывает двояким, в большом и в малом, в превосходящем и в недостающем» (56_{7-17}).

В свете вышеизложенного мы можем увидеть в алгоритме Никомаха математическую иллюстрацию к неписаному учению Платона, воплощающую тезис о двух началах всего сущего — единице и неопределенной двоице. В самом деле, здесь весь «космос» рациональных отношений иерархически разворачивается из первоначального отношения равенства в рамках единообразной процедуры дихотомического ветвления.

Еще раз прочитаем текст, которым Никомах предваряет описание алгоритма:

«И этот стройный и необходимый путь к познанию природы Вселенной ясным и недвусмысленным образом показывает нам, что прекрасное, определенное и познаваемое первично по своей природе в сравнении с неопределенным, неограниченным и безобразным; и далее, что части и виды неограниченного и неопределенного приобретают благодаря первому свою форму и границы, и находят подобающий им порядок и расположение, и делаются доступными измерению, и приобретают некоторое подобие и одноименность. Ведь понятно, что разумная часть души приводит в порядок неразумную часть, ее порывы и влечения, связанные с двумя видами неравенства, и посредством размышления подводит ее к равенству и тождеству. А для нас из этого уравнивания прямо вытекают так называемые этические добродетели, каковые суть благоразумие, мужество, мягкость, самообладание, выдержка и подобные им качества» (I 23.4–5).

Сам этот пассаж можно рассматривать как своего рода квинтэссенцию платоновской философии. В нем можно усмотреть отсылки и к Филебу с его диалектикой предела, беспредельного и меры, и к мифу о частях души, который Платон устами Сократа рассказывает в «Федре», и к многократно повторенному в «Государстве» тезису о том, что познание математических наук влечет душу от становления к бытию.

У нас есть даже некоторые основания предположить, что первоисточником этого пассажа мог служить текст платоновской лекции «О благе» в передаче Аристотеля. В самом деле, в последнем предложении данного отрывка речь идет непосредственно о благе и этических добродетелях. Надо думать, что «математическая» лекция Платона «О благе» также должна была заканчиваться некоторым схожим выводом, только развернутым более подробно.

Впрочем, оценка правомерности этого предположения относится всецело к компетенции специалистов по истории философии; наша же статья по основной своей установке — историко-математическая, хотя она и оказалась тесно связанной с историко-философскими вопросами.

Безусловный интерес представляет и соотнесение представленной в этой статье интерпретации алгоритма Никомаха с различными моделями «идеальных чисел» Платона, которые рассматривались в свое время Ю. Штенцелем[16], О. Теплицем[17] и О. Беккером[18] (см. также статьи В. С. Маргаритова[19] и А. Н. Паршина[20]).

Я хочу выразить свою глубокую признательность С. В. Месяц, которой принадлежит указание на возможную связь алгоритма Никомаха с основными положениями неписаного учения Платона. Я благодарю также Е. В. Афонасина и Г. П. Матвиевскую за постоянный интерес к моим историко-математическим изысканиям и за ряд редких материалов, которые они мне любезно предоставили.

---

[16] *Stenzel J.* 1) Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles. Leipzig; Berlin, 1924 (reprinted: Darmstadt, 1959); 2) Zur Teorie des Logos bei Aristoteles // Quellen und Studien zur Geshihte der Math. 1929. Bd 1. S. 34–66.

[17] *Toeplitz O.* Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Platon // Quellen und Studien zur Geshihte der Math. 1929. Bd 1. S. 3–33.

[18] *Беккер О.* Диайретическое порождение платоновых идеальных чисел // Историко-математические исследования. 2005. № 9(44). С. 288–330; *Becker O.* Zum Problem der Platonischen Idealzahlen (eine Retraktation) // Klassische philologische Studien. 1957. Bd 17. S. 1–25.

[19] *Маргаритов В. С.* Оскар Беккер и «идеальные числа» Платона // Историко-математические исследования. 2005. № 9(44). С. 282–287.

[20] *Паршин А. Н.* Идеальные числа Платона (к вопросу об интерпретации) // Владимир Соловьев и культура серебряного века. М., 2004.