Раздел III

ПЕРЕВОДЫ

ЛУКА ПАЧОЛИ

О БОЖЕСТВЕННОЙ ПРОПОРЦИИ

Перевод с латинского языка А. И. Щетникова

Светлейшему князю Лодовико Мариа Сфорца Англо, миланскому герцогу, прекрасному на войне и в мире, от брата Луки из Борго Сан-Сеполькро, члена ордена миноритов, профессора священной теологии о божественной пропорции послание

(Excelentissimo principi Ludovico Mariae Sfortiae Anglo Mediolanensium duci pacis et belli ornamento fratris Lucae ex Borgo S. Sepulchri ordinis minorum sacrae theologiae professoris de divina proportione epistola)

Светлейший герцог, в девятый день февраля, в год от нашего спасения 1498, в неприступной крепости Вашего города Милана, в почтеннейшем месте Вашей главной резиденции, состоялось научное состязание в присутствии достоуважаемого собрания известнейших и ученейших лиц, духовных и светских, постоянно наполняющих Ваш великолепный двор. Среди них находились преподобные господа епископы, протонотарии и аббаты, а от нашего священного серафического ордена присутствовали преподобный отец и тончайший теолог маэстро Гометио с достойнейшим толкователем Священного Писания братом Доминико по фамилии Понцоне и преподобный отец маэстро Франческо Бусти, украшающие миланскую общину своими добродетелями; из светских же лиц первым был мой особый покровитель блистательный синьор Галеаццо Сфорца, наместник Сансеверино, сильнейший военачальник Вашей Светлости, капитан, никому не уступающий в сражениях, и прилежный ученик в наших науках. Затем назову яснейших и превосходнейших ораторов, первых в медицине и астрономии: яснейшего и остроумнейшего толкователя Серапиона и Авиценны, исследователя небесных тел и предсказателя будущего Амброджо Роза, ученейшего доктора, целителя болезней Алуизи Марлиано, знатока всех разделов медицины Габриеля Пировано, всеми уважаемого и почитаемого Николо Кузано[1] вместе с тончайшим из всех профессоров Андреа Новарезе и других многознающих докторов *utriusque iuris*[2], а также советников, секретарей и канцлеров Вашего достославного магистрата.

В компании с замечательными архитекторами, инженерами и прилежными изобретателями новых вещей находился Леонардо да Винчи, наш флорентийский согражданин, который превосходными работами в живописи и скульптуре оправдывает свою репутацию. Он создал удивительную и замечательную статую всадника высотою от темени до основания в 12 локтей, т. е. в 36 начерченных здесь линий AB, так что вся масса коня составляет около 200 000 фунтов, каждый

[1] Не следует путать этого ученого мужа с кардиналом Николаем Кузанским (1401–1464). Здесь и ниже примечания переводчика.

[2] «Того и другого [т. е. церковного и гражданского] права» (лат.).

по двенадцать обычных унций, каковой статуе, посвященной святейшей памяти Вашего непобедимого отца и стоящей в Монте-Кавалло, позавидовали бы Фидий и Пракситель; и он же своей легкой рукой изобразил Тайную вечерю нашего Спасителя в месте телесного и духовного размышления, святом храме делла Грацие, каковому изображению уступили бы первенство Апеллес, Мирон, Поликлет и другие живописцы. Им же было создано бесценное сочинение о переместительном движении от ударов, тяжестей и всяческих сил, т. е. случайных тяжестей, — к которому со всем тщанием выполнена достойная книга рисунков человеческих движений, каковое он своими изысканиями старается привести к должному завершению. С ним был Джакомо Андреа да Феррара, к которому он относится как к брату, — остроумнейший комментатор Витрувия[3], не уступающий никому в искусстве военного строительства.

Ваши золотые и медоточивые слова служат величайшей рекомендацией, которую по достоинству оценят Бог и мир, ведь если эта добродетель дарована, она благожелательно передается к другим, порождая милосердие в ближнем, к его радости и чести, следуя святому речению «Quod et sine figmento didici et sine invidia libenter communico»[4]. Уясненный смысл этих сладчайших слов держится в уме, и никогда не будет закреплен на мраморе. И хорошо, что я многое получил как бы от врожденной природы, особенно в части того направления (faculta), из которого берут начало все остальные; и мне, уже немало изнуренному трудными заботами, дневными и ночными, телесными и духовными, было даровано Всевышним, по его безмерной благосклонности, получать удовольствие от необходимой науки и достойнейших математических дисциплин. Многое с прилежанием собрано в нашем большом сочинении по этим дисциплинам и направлениям, каковое посвящено великодушному родственнику Вашей Светлости герцогу Урбинскому Гвидо Убальдо и выводится в пяти его разделах[5], мне же пора вместе с другими в солнечном месте подсчитывать годы. Но из сильного побуждения перевести дух на пустынном берегу и в качестве приправы ко всем прочим нашим сочинениям, составленным по сходным направлениям, ради благосклонного вкуса Вашей Светлости ко всем наукам и математическим дисциплинам, к пользе его почтительных подданных, а еще для украшения его достойнейшей библиотеки с

[3] Витрувий — римский архитектор второй половины I в., автор «Десяти книг об архитектуре», изучение которых сыграло огромную роль в становлении архитектуры итальянского Возрождения.

[4] «Без хитрости я научился, и без зависти я преподаю» (лат.) — *Премудрость Соломона*, 7:12.

[5] Имеется в виду трактат Луки Пачоли «Сумма арифметики, геометрии, пропорций и пропорциональности» (далее — *Сумма*), изданный в 1494 г. в Венеции.

бесчисленным множеством томов по всем специальностям и учениям, я составил этот короткий обзор и полезнейший трактат, названный «De Divina Proportione». Он с приложенными к нему материальными формами всех тел, которые в нем содержатся, одарит того, кто его увидит, не меньшим изумлением, нежели все прочие тома с помещенными в них другими достойнейшими вещами, поскольку названные формы стали наконец для живущих доступны. В нем говорится о высоких и утонченных вещах, которые поистине служат испытанием и пробирным тиглем для всех изысканных наук и дисциплин: ведь из них проистекают все прочие спекулятивные действия, научные, практические и механические; и без предварительного ознакомления с ним человеку невозможно ни познавать, ни действовать, как это будет показано. И Ваша Герцогская Светлость с прозорливым разумением побудит своих родственников и других почтительных подданных с наслаждением и полным удовлетворением обсудить этот последнейший плод, в котором нет ни ложных петель, ни других обманчивых шуток, ни лживых и неправдоподобных поэтических выдумок, от которых в уши входит лишь дым. И хотя, следуя философу, ложные вещи приносят пользу теми истинами, которые из них вытекают, как обратное к прямому и противоположное к иному, все же нам много более полезны и выгодны истинные вещи; ведь если они не истинны, то не достигают цели. Но, как подтверждают Аристотель и Аверроэс, наши математические науки являются самыми истинными и стоят на первом уровне строгости, а за ними идут естественные. Для введения доводов в пользу названных наук приведено достаточно.

Всегда с покорностью и с должным почтением к Вашей Герцогской Светлости, постоянно подающей мне высочайшие советы. «Quae felicissime ad vota valeat».

<...>

Глава II. **Предисловие к настоящему трактату «О божественной пропорции»**

Propter admirari ceperunt philosophari[6]. Прими же, Светлейший герцог, следующее наставление «учителя тех, кто знает»[7], согласно которому наше знание имело своим началом зрение, и то же самое он утверждает в другом месте, говоря: «Quod nihil est in intellectu quin prius fuerit in sensu», что значит: «Нет ничего в разуме, что прежде

[6] «Удивление побуждает к философствованию» (лат.) — Аристотель, *Метафизика*, 982b12.

[7] Так Аристотеля назвал Данте в «Божественной комедии»: Inferno, IV, 131.

не восприняли бы чувства». И знатоки заключают, что зрение является самым благородным из наших чувств, а простые люди говорят, что глаза служат первыми вратами, через которые разум познает и получает удовольствия.

Как сказано в этом месте: когда египетские жрецы наблюдали затмение луны, они были сильно удивлены, и, отыскивая причину, нашли ее через истинную науку, естественно придя к тому, что Земля встает между Солнцем и Луной, чем остались довольны. И поныне ее последователи передают ее из рук в руки, со светом пяти окон разума, ради нашей пользы добавляя к своей глубокой науке бесчисленное множество томов, ведь если один мыслитель посмотрит на другого, он и сам потом многое создаст. Вот о чем я размышляю в этом, последнейшем обзоре избранных математических наук, взявшись по своему почину за перо и вместе с тем своими собственными руками изготовив эти тела материально, для общей пользы, по их собственной форме, чтобы вручить их вместе с настоящим обзором Вашей Герцогской Светлости. Необыкновенный облик Вашей Светлости, по нашим временам — словно небесный, придает мне уверенности в том, что ваш изощренный и проницательный разум обретет величайшее удовлетворение, максимальное в вышеназванном свете, проведя расследование не меньшее, чем у древних египтян касательно затмений, так что для этих форм будет найдена их причина и сладчайшая гармония при помощи и поддержке настоящего трактата. Вот что я знаю точно: если кто в прошлом от части этих наук и дисциплин уже получил великие и обширные дары, в будущем он получит еще большие, величайшие и обширнейшие; и еще больше — при внимательном присмотре за их приобретением, особенно если побуждать к этому ваших близких родственников, почтительных подданных и доброжелателей; ведь названные математические науки служат основанием и лестницей, ведущей к познанию всякой другой науки, ибо они стоят на первом уровне строгости, что подтверждает и философ, говоря так: «Mathematicae enim scientiae sunt in primo gradii certitudinis et naturales sequuntur eas».

Стало быть, как здесь сказано, математические науки и дисциплины стоят на первом уровне строгости, а за ними следуют все естественные, и без их понимания невозможно хорошо познать ничего другого. И в *Книге мудрости* написано: «Quod omnia consistimi in numero, pondere et mensura»[8], что означает, что все, что имеется во вселенной сверху, снизу и с четырех сторон, по необходимости упорядочено по числу, весу и мере. Августин Аврелий в трактате *О Граде Божием* говорит об этих трех, что Верховный Владыка всемерно радуется, поскольку

[8] «Все расположено числом, весом и мерой» (лат.) — *Премудрость Соломонова*, 11:21.

«Fecit stare ea quae non errant»[9]. Их любезным поощрением приобретаются многие сладчайшие и полезные плоды, доселе неведомые, и они ведут от изумления к размышлению и побуждают предаться их изучению и исследованию, и подают повод в этом веке обновить свое время и с большим рвением в изучении какой-либо науки достичь совершенства.

О Вашей Герцогской Светлости идет и иная добрая слава, когда крепнет уверенность близких родственников и благодарных подданных в том, что в ее Светлейшем Владении они защищены от всех нападений, — не меньше, чем делал для своей родины благородный изобретательный геометр и достойнейший архитектор Архимед. Ведь он, как пишут, своими новыми изобретениями и всевозможными машинами долгое время сохранял город сиракузян невредимым от натиска и военного успеха римлян, пока Марк Марцелл не придумал, как его взять. И от повседневного опыта Вашей Герцогской Светлости не скрыто — а ведь уже многие годы святейшая память о Вашем родителе по всей Италии, а также по обеим Галлиям, Трансальпийской и Цисальпийской, не имеет автора, наставника и нормы, — что оборона больших и малых республик, называемая также военным искусством, невозможна без знания Геометрии, Арифметики и Пропорций, каковые превосходно сочетаются с честью и пользой. И ни одно достойное занятие из тех, с которыми имеют дело инженеры и новые механики, так не ведет к взятию [крепости] или же к долгой обороне, как те, в которых в былые времена упражнялся великий геометр Архимед из Сиракуз.

Но хорошо ли рассмотрена в общих чертах вся Ваша артиллерия, бастионы и другие укрытия, бомбарды, баллисты, катапульты, тараны, стеноломные машины, «черепахи» и другие бесчисленные хитроумные машины и орудия, всегда ли численно вымерена сила и установлены пропорции, требуемые для их изготовления? Есть еще и башни, цитадели, зубчатые стены, эскарпы, контрэскарпы, равелины, рвы, мосты, навесы и другие укрепления городов и крепостей, — на должном ли уровне их геометрия и пропорции, а также висящие и натянутые отвесы? Вегетий, Фронтин[10] и другие уважаемые авторы писали о том, какими искусниками были древние римляне, весьма заботившиеся о тщательной подготовке инженеров и других командиров для земли и моря, но без математических дисциплин, т. е. без Арифметики, Геометрии и Пропорций, эта подготовка не может быть достаточной. Это внятно объясняли и утверждали Ливий, Дионисий, Плиний и

---

[9] «В сотворенном нет ошибок» (лат.).

[10] Флавий Вегетий Ренат (V в. н. э.) и Секст Юлий Фронтин (35–103 н. э.) — римские писатели, авторы трактатов по военному делу.

другие древние историки, а за ними Роберто Валторри, опытнейший оружейник, который все изложил в своем достойном сочинении, названном *О военных орудиях*, посвятив его светлейшему синьору Сиджизмондо Пандольфо. Об этих машинах и орудиях и еще о многих других, рассматриваемых по порядку, в своей книге, названной *Представление оружия*, написал светлой памяти ближайший родственник Вашей Светлости, Федериго де Монтефельтро, блистательный герцог Урбинский, со всех сторон окруживший великолепное здание своего благородного и восхитительного дворца в Урбино фризом из живого и прекрасного камня, обработанного руками достойнейших каменотесов и скульпторов. Среди других упомяну о Юлии Цезаре, который пишет об искусно построенном мосте в своих *Записках*. Наконец, таков наш святой монастырь в достойном городе Тоди в Умбрии, а в нем — святейшей памяти вашего отца часовня Сан-Фортунато. А еще — великое множество подвешенных толстейших канатов, каковыми на мосту через Тибр была легко достигнута знаменитая победа.

И наш тончайший Скотт[11] предавался великим спекуляциям в Священной Теологии не без осведомленности в математических дисциплинах, каковая проявилась во всех его святых трудах, а наилучшим образом — в одном вопросе II книги *Сентенций*, где исследуется, сколько места занимает ангел в своем существовании. Все это также хорошо показано в утонченном фолианте нашего прозорливейшего мегарского философа Евклида[12]. И в текстах другого философа, князя «тех, кто знает»: в *Физике*, *Метафизике*, *Второй Аналитике* и прочих — выявлены трудности, возникающие при неведении в названных дисциплинах. И нехватка хороших астрономов случается не иначе, как по незнанию Арифметики, Геометрии, Пропорций и Пропорциональности. И 9 из 10 судей запутались в таблицах и других вещах, вычисленных Птолемеем, Албумасаром, Али, Алфраганом, Гебером, Альфонсо, Бьянкино, Просдочимо[13] и другими, каковые из-за невнимательности переписчиков могут оказаться запятнанными и от-

[11]Иоанн Дунс Скотт (1265–1308) — знаменитый английский схоласт (Лука Пачоли говорит о нем «наш» как о собрате по ордену францисканцев).

[12]Знаменитого геометра Евклида Александрийского в эпоху Возрождения путали с Евклидом Мегарским, главой мегарской философской школы.

[13]Приведен список авторов астрономических таблиц. После знаменитого Клавдия Птолемея (II в. н. э.) перечислены несколько астрономов мусульманского Востока, известных в Европе под латинизированными именами: Albumasar = Абу Машар, Джафар ибн Мухаммад ибн Умар ал-Балхи (787–886), Ali = Абу-л-Хасан Али ибн Аби Саид Абд-ар-Рахман ибн Юнис (950–1009), Alfragan = Абу-л-Аббас Ахмад ибн Мухаммад ал-Фаргани (XI в.), Geber = Абу Муса Джабир ибн Хайян (вторая половина VIII в.). Далее идет Альфонсо X Ученый (1226–1284) — король Кастилии и Леона, покровитель наук, при котором были составлены так называемые Альфонсовы таблицы. Наконец, упомянуты и два итальянских астронома: Бьянкино (?) и Просдочимо да Бельдоманди (ум. 1428).

ринутыми, и, как следствие, возникают величайшие и явные ошибки, чем причиняется немалый вред и вызывается предубеждение тех, кто этим таблицам доверился.

Как мне не раз объясняли специалисты, высшая тонкость городских законов состоит в том, чтобы осуществлять присмотр за потоками воды, берегами и наводнениями, и выдающаяся голова — Бартоло да Саксоферрато[14] составил об этом специальный трактат, назвав его *Тиберния*. Во введении к нему воздана хвала геометрии с арифметикой, и это также подтверждает наш собрат Гвидо, профессор Священной Теологии, оценивший в этом трактате описание дамб, которые строились на Тибре из-за наводнений в этих местностях, особенно в Перудже за Дерутой. Там, где речь заходит о прямолинейных и криволинейных геометрических фигурах, всегда цитируется наш прозорливейший философ Евклид, обходившийся с ними с величайшей тонкостью.

Я не говорю уже о сладостной и нежной музыкальной гармонии, о совокупной широте и интеллектуальном спокойствии перспективы, о расположении архитектуры, о вселенском описании земли и моря и об учении о движущихся телах и небесных явлениях, поскольку все ясно и из того, что уже сказано. Постараюсь не надоедать читателю другими практическими и спекулятивными науками, вкупе со столь необходимым в человеческих делах механическим искусством, без поддержки которого невозможно навести в них должный порядок. И хотя нет ничего удивительного в том, что в наше время хорошие математики встречаются нечасто, все же редкость хороших наставников не должна быть поводом для того, чтобы глоткой и праздным пером превзойти по части глупости суемудрых современников, ведь благоразумным известна пословица: «Aurum probatur igni et ingenium mathematicis». То есть золото проверяется огнем, а проницательность разума — математическими дисциплинами. Это высказывание говорит вам, что разум математиков наиболее открыт каждой науке, ведь они привычны к величайшей абстракции и тонкости, поскольку всегда рассматривали то, что находится вне чувственной материи. Как говорит тосканская поговорка, это те, кто расщепит волос налету.

По этой причине древний и божественный философ Платон вполне заслуженно преградил доступ в свою прославленную Гимназию несведущим в Геометрии, начертав над главным входом большими и внятными буквами такую надпись: «Nemo huc geometriae expers ingrediatur», что означает «Да не войдет сюда не знающий геометрии». Он сделал так, потому что в ней сокрыта всякая другая наука.

[14] Бартоло да Саксоферрато (1314–1357) — видный юрист, комментатор римского права.

А у Витрувия можно прочитать, что когда тончайший созерцатель природы Пифагор изобрел прямой угол, за переполнившую его нежнейшую сладость он с величайшим ликованием принес в жертву богам 100 быков, о чем еще будет сказано ниже.

О математиках и их рекомендациях сказано достаточно. На сегодняшний день их число в этом Вашем славном городе заметно возросло — по благословению Вашей Герцогской Светлости, благодаря интересу публики к новому предложенному ей чтению и успеху у уважаемых слушателей, следуя благодати, дарованной мне Всевышним. Ясно и со всем тщанием я представляю на их суд возвышенную книгу вышеназванного Евклида о науках Арифметики и Геометрии, Пропорций и Пропорциональности[15], добавив к ним свои десять книг, напечатанных достойнейшим образом; и всегда прикладывая свою теорию и нашу практику к большей пользе и к широте разумения, а также к тому, чтобы правильно провести остаток отпущенного нам времени.

Глава III. **О значении и важности того, что называется математическим, и о математических дисциплинах**

Слово *математический*, Светлейший герцог, будучи греческим, произведено от μαθηματικός, что на нашем языке значит *обучаемый* (disciplinabile). В нашем изложении под математическим науками и дисциплинами понимаются Арифметика, Геометрия, Астрология, Музыка, Перспектива, Архитектура и Космография, а также другие науки, от них зависящие. Обычно ученые принимают из них первые четыре — Арифметику, Геометрию, Астрономию и Музыку, а остальные считают подчиненными, т. е. зависимыми от этих четырех. Так считают Платон и Аристотель, и Исидор[16] в его *Этимологии*, и Северин Боэций[17] в его *Арифметике*. Но, по нашему мнению, сколь бы неразумным оно ни было, эти науки следует ограничить тремя либо

[15] Имеется в виду выполненная Лукой Пачоли редакция латинского перевода «Начал» Евклида, каковой сделал с арабских источников ок. 1260 г. Джованни Кампано да Новара (1220–1296), дополнив собственными пояснениями и размышлениями. Этот перевод был впервые напечатан в 1482 г. в Венеции, и именно этим изданием пользовался Лука Пачоли. Однако в нем имелось много ошибок, возникших по большей части по вине переписчиков рукописи, и Лука Пачоли предпринял работу по их исправлению. Исправленный перевод был также напечатан в Венеции в 1509 г.

[16] Исидор Севильский (ок. 570–636), испанский теолог и философ, автор «Этимологии» — энциклопедического труда, получившего широкое распространение в Средние века.

[17] Аниций Манлий Торкват Северин Боэций (480–524) — римский философ и политический деятель, автор компилятивных работ по математике и музыке, широко известных в Средние века.

пятью; а именно Арифметикой, Геометрией и Астрономией, исключив Музыку, по тем же причинам, по которым пятой берется Перспектива, каковая по тем же причинам добавляется к названным четырем, по которым Музыка добавляется к названным нами трем.

Говорят, что Музыка услаждает слух, одно из природных чувств, а та — зрение, обладающее большим достоинством, ибо оно служит первыми вратами разума. Говорят также, что первая обращает внимание на звучащее число и на значимую меру времени его звучания; а вторая — на натуральное число, согласно всякому его определению, и на меру видимой линии. Если первая воссоздает душу согласно гармонии, то вторая доставляет большее наслаждение благодаря должному расстоянию и разнообразию цветов; и если первая рассматривает гармонические пропорции, то вторая — арифметические и геометрические.

И вот, Светлейший герцог, я уже много лет размышляю над этим вопросом и все еще не могу сказать, сколько их — четыре, три или пять; так что мое невежество не позволяет мне говорить об этом безошибочно. И как это получается, что, увидев хорошо написанную фигуру с правильными очертаниями, мы глядим на нее, затаив дыхание, расценивая ее как создание скорее божественное, нежели человеческое? Ведь картина лишь подражает природе, насколько это возможно. И то, что открывается нашим глазам в изысканном изображении тайной вечери нашего спасителя, — это не то же самое, что открылось живым апостолам, внимавшим голосу безошибочной истины, когда этот голос произнес: «Unus vestrum me traditurus est»[18]; однако и на картине действия и жесты направлены от одного человека к другому и обратно, с живым и притягательным вниманием к изреченному слову: так достойно расположил их своей искусной кистью наш Леонардо.

Как рассказывается о Зевксисе в книге Плиния *О картинах*, тот бросил вызов Паррасию, изобразив виноградную гроздь, и когда работа была выставлена на публике, птицы приняли эту гроздь за настоящую и слетелись ее клевать. А его соперник нарисовал покрывало. Зевксис же, полагая это покрывало настоящим, попросил Паррасия открыть картину публике для сравнения: «Отдерни покрывало, чтобы каждый мог увидеть твою работу, как он увидел мою». Так Зевксис признал себя побежденным, ибо птицы — это неразумные животные, а здесь был обманут разум художника.

Мне же доставляет большое удовольствие любовь к такой науке — пусть я ничего в ней и не понимаю, — которая меня не обманывает, и нет ничего любезного уму в сомнительной картине, вводящей в заблуждение как неразумных, так и разумных животных. А по сему я так и не выяснил, имеются ли три главные науки, а другие им подчи-

[18] «Один из вас предаст меня» (лат.) — *Евангелие от Матфея*, 26:21.

нены, или же их пять, и следует ли убрать из списка Музыку, или же добавить в него Перспективу, и достойна ли она восхваления или нет. Так что я готов принять все это на веру. Вот и все, что я могу об этом сказать.

Глава IV. **О том, что читатель должен охватить разумом, и об употребляемых обозначениях**

Первым делом я замечу, что всякий раз, когда я буду писать $1^{е}$ [предложение] в первой, $4^{е}$ — во второй, $10^{е}$ — в пятой, $20^{е}$ — в шестой и так до пятнадцатой, под первой цифрой всегда следует понимать номер предложения, а под второй — номер книги нашего философа Евклида, который всеми признается за главу данной области. Таким образом, говоря о $5^{м}$ в первой, я говорю о пятом предложении его первой книги и также о других отдельных книгах, составляющих цельную книгу об элементах и началах Арифметики и Геометрии[19]. Но когда упоминается другое его сочинение или книга другого автора, это сочинение или этот автор называются по имени.

Еще следует сказать о разнообразных знаках и сокращениях, обычно употребляемых в подобных занятиях, особенно в нашем, так же как и в любом другом; ведь фармацевты пользуются своим обозначением для скрупулов, унций, драхм и маниполей, серебряных дел мастера и ювелиры — для гранов, динаров и каратов, астрологи — для Юпитера, Меркурия, Сатурна, Солнца, Луны и остальных знаков, торговцы — для быстрого различения лир, сольдо, гроссов и динаров; и это только для того, чтобы избежать излишних записей и не изводить лишних чернил и бумаги; так же и мы в математике для алгебры, т. е. для спекулятивной практики, вводим для вещи, квадрата (censo), куба и других терминов, как это было в нашем вышеназванном сочинении, следующие обычные сокращения[20]:

℞ — корень (Radice), один или несколько;

℞℞ — корень из корня, один или несколько;

m̃ — «меньше» (meno) во всякой по природе величине;

p̃ — «больше» (più), также во всякой величине;

q^{a} — величина (quantita), одна или несколько, означена через a или e;

po.^{a} — степень (potentia), одна или несколько, означена через a или e;

[19] В нашем переводе эта система обозначений всюду передается так: предложение 1 Книги I, предложение 4 Книги II, и т. д.

[20] Все эти сокращения основаны на итальянском языке и в русском переводе по большей части не могут быть воспроизведены; их не воспроизводит и итальянское издание 1956 г.

li.^{a} — линия (linea), одна или несколько, означена через *a* или *e*;
Geo.^{a} — геометрия; geo.^{ca} — геометрическая;
Arith.^{ca} — арифметика;
propor.^{e} — пропорция (proportione);
N.^{o} — число (numero);
$\square^{o}$ — квадрат (quadrato);
Dr — разность (differentia);
p.^{o} — первый (primo);
2.^{o} — второй;
m̃.cato — умноженный (multiplicato); m̃.care — умножить;
s. propor.^{e} h. el m. e doi ex.^{i} — согласно пропорции, имеющей середину и два края (secondo la proportione havente el mezzo e doi extremi).

Схожим способом образуются и другие имена — для умножения, для произведения, для прямоугольника. И еще квадрат некоторой величины и потенция этой величины — одно и то же, поскольку потенция линии есть относящийся к ней квадрат, ибо то, чем может стать линия, есть ее квадрат. Это неоднократно будет видно в нашем обсуждении, и не следует путаться со смыслом слов.

Глава V. **О подходящем названии для настоящего трактата или обзора**

Мне кажется, Светлейший герцог, что для нашего трактата подойдет название «De la Divina Proportione» из-за многих соответствий, которые я нахожу в нашей пропорции и которые ниже обсуждаются в связи с существованием Бога. Из них мы выберем четыре, для нашей цели этого будет достаточно.

Первое состоит в том, что она является единственной, и к ней невозможно добавить другие виды и разновидности: это единство является высшим атрибутом самого Бога, согласно всякому богословскому и философскому учению.

Второе соответствие связано со Святой Троицей: как в божественном одна и та же субстанция охватывает три ипостаси Отца, Сына и Святого Духа, так одна и та же пропорция этого рода всегда заключена между тремя членами. Этих членов не может быть ни больше, ни меньше, о чем еще будет сказано.

Третье соответствие состоит в том, что как сам Бог не может быть определен понятными нам словами, так и эта наша пропорция не может быть ни означена понятным числом, ни выражена каким-либо рациональным количеством, но она всегда остается тайной и скрытой, так что математики называют ее иррациональной.

Четвертое соответствие состоит в том, что как сам Бог не изменяется и пребывает весь во всем и весь в каждой части, так и эта наша пропорция всегда и во всяком количестве, непрерывном и дискретном, большом или малом, является той же самой и всегда неизменной; и она никоим образом не может измениться так, чтобы быть воспринятой разумом, как мы покажем ниже.

Пятое соответствие (если допустимо добавить его к уже названным) состоит в том, что как Бог сравнивается с Небесной Силой, иначе называемой Пятой Сущностью, опосредующей четыре других простых тела, т. е. четыре элемента — Землю, Воду, Воздух и Огонь, а через эти сущности — и всякую другую вещь в природе, так и наша святая пропорция в качестве формальной сущности придает — согласно древнему Платону в его *Тимее* — самому небу форму тела, называемого додекаэдром, и это тело из 12 пятиугольников, как будет показано ниже, без нашей пропорции невозможно составить. Сходным образом каждому из остальных элементов сообщена своя собственная форма, ни в чем не схожая с другими: огню — пирамидальная фигура, называемая тетраэдром, земле — кубическая фигура, называемая гексаэдром, воздуху — фигура, называемая октаэдром, и воде — та, что называется икосаэдром.

Ученые называют все эти формы и фигуры правильными телами, и это будет показано ниже для каждой из них по отдельности. Эти тела опосредуют бесконечное число других тел, называемых зависимыми. И эти пять правильных тел без названной нами пропорции невозможно ни пропорционально соотнести между собой, ни вписать в одну сферу. Все это будет показано ниже. И этих соответствий, хотя к ним можно добавить и другие, для данного краткого изложения достаточно.

Глава VI. **О достойном ее восхвалении**

Эта наша пропорция, Светлейший герцог, достойна всяческой привилегии и превосходства, какие только можно выказать в связи с ее бесконечной способностью, ведь без ее знания многочисленные и достойные восхищения предметы не могли бы быть найдены ни в философии, ни в какой-либо иной науке. Этот дар безусловно исходит от неизменной природы ее высших принципов, как утверждает великий философ Кампано, наш знаменитейший математик, в предложении 10 книги XIV. С ним можно всецело согласиться в том, что она и в самом деле такова, и что такое разнообразие тел по величине и по количеству оснований, а также по фигурам и формам согласуется по некоторому иррациональному созвучию[21]; и ниже она проявит порази-

[21] Музыкальная терминология, восходящая к пифагорейцам.

тельные следствия, которые — если по ней разделить линию — следует назвать не природными, но поистине божественными.

Глава VII. **О первом следствии относительно линии, разделенной по нашей пропорции**

Пусть прямая линия разделена в пропорции, имеющей середину и два края, по другому имени, данному учеными, наша изысканная пропорция называется несократимой (nuncupata), тогда, если к большей части прибавить половину всей пропорционально разделенной линии, с необходимостью окажется, что квадрат суммы всегда будет пятикратным, т. е. в 5 раз большим квадрата указанной половины[22].

Далее следует сказать, как надлежит понимать и строить названную пропорцию между количествами и как ученейшие мужи называли ее в своих книгах. Я утверждаю, что название «proportio habens medium et duo extrema» — «пропорция, имеющая середину и два края», означает, что она имеет отношение ко всему трехчастному, ведь каким бы ни было это трехчастное, оно всегда будет иметь середину и два края, ибо без них не представить и середины. Таким образом производится деление в предложении 29 [=30][23] книги VI, и прежде в определении 3 книги VI описывается, как это деление надо производить. А в предложении 11 Книги II показано деление линии по той же самой способности, хотя она и не называется пропорцией ранее книги V. И у Кампано она добавлена в числах в предложении 16 книги IX[24]. Вот что можно сказать о ее определении.

Как понимать ее середину и края. После того, как наша пропорция названа своим особенным именем, остается объяснить, как следует понимать середину и края в любом количестве, и каковы должны быть условия для получения между ними этой божественной пропорции. Для этого надо знать, как указано в книге V, что между тремя членами одного и того же рода всегда по необходимости имеются две наличности (doi habitudini) или, лучше сказать, две пропорции: одна — между первым и вторым членами, и вторая — между вторым и третьим.

К примеру, пусть имеются три количества одного рода, ибо в противном случае существование между ними пропорции нельзя предста-

[22] Предложение 1 книги XIII.

[23] Нумерация предложений *Начал* в переводе Кампано, которым пользовался Лука Пачоли, не везде совпадает с нумерацией этих же предложений в редакции Гейберга. Всюду, где имеется такое различие, мы даем в квадратных скобках номер данного предложения по «Началам» в редакции Гейберга.

[24] Надо бы выяснить, что там было добавлено у Кампано, — ведь книга IX «Начал» трактует о натуральных числах, и в ней не может идти речи о делении в иррациональном отношении.

вить. И пусть первое — a, в числах равно 9, второе — b – 6, третье — c – 4. Я утверждаю, что между ними имеются две пропорции: одна от a до b, т. е. от 9 до 6, и мы обычно называем ее полуторной, когда большой член содержит меньший и его половину, ведь 9 содержит 6 и еще 3, половину от 6, вот мы и называем ее полуторной. Но мы не станем обсуждать пропорцию вообще, ведь мы уже посвятили пропорциональности целый трактат, полностью разъяснив ее в этом сочинении, и потому я не стану здесь о ней распространяться, но всегда буду иметь в виду те определения и разделения, которые там были высказаны. И наше настоящее обсуждение будет посвящено одной лишь этой пропорции, ведь с такой степенью подробности в каком-либо имеющемся трактате речь о ней еще не шла.

Итак, возьмем для примера три количества, и пусть от второго b до третьего c, т. е. от 6 до 4, будет иметься та же самая полуторная пропорция. Подобны они или нет, нас здесь не интересует: нам нужно показать только то, что между тремя однородными членами по необходимости имеются только две пропорции. Я утверждаю также, что наша божественная пропорция соблюдает одни и те же условия, а именно: между тремя ее членами — средним и двумя крайними — всегда неизменно содержатся две пропорции, и всегда одного и того же обозначения. И в других пропорциях, будь они непрерывными или обособленными (continue over discontinue)[25], это происходит бесконечно меняющимися способами: в одном случае между тремя членами она будет двойной, в другом — тройной, и так далее, пробегая по всем общим видам. Но между серединой и краями нашей пропорции не может быть изменения, как будет сказано [ниже].

Отсюда заслуженно следует четвертое соответствие с Верховным Творцом; так как она стоит в ряду других пропорций без вида или другого отличия, при одном соблюдении условий их определения, в этом ее можно уподобить Нашему Спасителю, который пришел не для того, чтобы нарушить Законы, но чтобы исполнить их, и общался со всеми, подчиняясь и слушаясь Марию и Иосифа. Так и эта наша пропорция, ниспосланная небом, сопровождается другими в определении и в условиях, и не отделяется от них, хотя она и более замечательна, имея в виду, что принцип единства между любыми количествами не имеет различий и изменений, как великий Бог сказал нашему святому Северину, а именно: «Stabilisque manens dat cuncta moveri»[26]. По

[25] *Непрерывной* называется пропорция из трех или более членов, в которой средние члены являются связующими, например такая: $a : b = b : c = c : d$. В *обособленной* пропорции количества в каждой паре связаны лишь самим фактом пропорциональности: $a : b = c : d = e : f$.

[26] «Неподвижный двигатель для всего движущегося» (лат.) — Боэций. Об утешении философией, 10.

этой причине следует знать, чтобы уметь распознать ее среди случайных количеств, что между тремя ее членами всегда неизменно имеется непрерывная пропорциональность такого рода: произведение меньшего члена на сумму меньшего и среднего равно квадрату среднего, и по следованию (per consecuente), согласно определению 10 [=11] книги V, данная сумма по необходимости будет ее большим членом. И, когда таким образом окажутся упорядоченными три количества любого рода, говорят, что они состоят в пропорции, имеющей середину и два края. И больший член всегда равен сумме меньшего и среднего, так что можно сказать, что данный больший член является совокупным количеством, разделенным на две части, т. е. на меньший и средний члены по этому условию. И надо заметить, что указанная пропорция не может быть рациональной, ибо нельзя ни меньший член, ни средний выразить каким-либо числом, даже если больший член рационален; поэтому они всегда иррациональны, как будет ясно из дальнейшего. И в этом — третье соответствие с Богом, как сказано выше.

Глава VIII. **Как понимается количество, разделенное согласно пропорции, имеющей середину и два края**

Следует хорошо знать, что для того, чтобы разделить количество согласно пропорции, имеющей середину и два крайних члена, надо образовать две такие неравные части, чтобы произведение меньшей на всю данную неразделенную величину было равно квадрату большей части, как утверждает наш философ в определении 3 книги VI. И хотя иногда говорят не о делении данного количества согласно пропорции, имеющей середину и два края, но лишь о том, чтобы образовать две части с таким условием, чтобы произведение одной части на всю данную величину было равно квадрату другой части, что хорошо понимают искушенные знатоки, это предложение следует сводить к нашей названной пропорции, что не всегда понимается.

К примеру, когда говорят «Разделим 10 на две такие части, что умножением одной из них на 10 получится столько же, сколько умножением другой на саму себя», это будет тот же самый случай; и если действовать по предписаниям спекулятивной практики алгебры и альмукабалы, каковые под другим именем дают правило вещи, помещенное в нашем предыдущем сочинении, то меньшая часть составит 15m̃℞125, а большая — ℞125m̃5[27]. Эти части иррациональны, и в искус-

[27] Весь этот пример с делением 10 на две части в среднем и крайнем отношении перенесен сюда Лукой Пачоли из его *Суммы*, а в нее он попал из «Книги абака» Леонардо Пизанского (1180–1240), к тому же из сочинений математиков Востока, а именно от Абу Камила ал-Мисри (850–930) и Мухаммада ибн Мусы ал-Хорезми (787–850).

стве они называются вычетами; наш философ в предложении 79 [=85] книги X насчитывает шесть их видов. Обычно эти части выражаются так: меньшая равна пятнадцати за вычетом корня из ста двадцати пяти. И можно сказать так: представим ℞125 как то, что несколько больше 11, и вычитание его из 15 даст несколько больше 3, а лучше сказать — несколько меньше 4. А большая часть выражается так: корень из ста двадцати пяти за вычетом пяти. И можно сказать: представим ℞125, что несколько больше 11, как уже было сказано, и при вычитании из него 5 разность будет несколько больше 6, а можно сказать и так, что названная большая часть будет несколько меньше 7.

Но подобные действия умножения, сложения, вычитания и деления двучленных вычетов, корней и прочих рациональных и иррациональных количеств, сложенных и разложенных разными способами, уже были разъяснены в нашем предыдущем сочинении, и я не стану их здесь повторять. Ведь я намереваюсь говорить лишь о новых предметах и не возвращаться к уже сказанному.

И если разделено любое количество, всегда имеются три члена, упорядоченные по непрерывной пропорциональности, так что один член будет совокупным разделенным количеством, т. е. большим пределом, каковым в нашем случае является 10; и другой член будет большей частью, т. е. средним, ℞125ⓜ5; и третий — меньшим, 15℞℞125. Та же самая пропорция, в которой первый член так относится ко второму, как второй к третьему, получится между ними и в обращении, когда третий член так относится ко второму, как второй к первому. И при умножении меньшего члена 15ⓜ℞125 на больший 10 получится столько же, сколько при умножении среднего члена ℞125ⓜ5 на себя, ведь оба произведения равны 150ⓜ℞12500, как найдено по нашей пропорции. И поэтому о 10 говорят как о разделенном в пропорции, имеющей середину и два края: ведь его большая часть равна ℞125ⓜ5, а меньшая — 15ⓜ℞125, и обе они иррациональны согласно предложению 6 книги XIII, и еще — по предложению 11 книги II и предложению 16 книги IX[28]. Вот что надо сказать о таким образом разделенном количестве.

Глава IX. **Что представляют собой корни из чисел в других количествах**

Поскольку в нашем сочинении будут упоминаться корни, мне важно кое-что о них кратко сказать. О корнях говорится во всех случаях, и не только когда корень из некоторого количества также являет-

[28] Эта последняя отсылка непонятна — в книге IX речь идет об отношении чисел, и в ней нигде не рассматриваются иррациональные величины.

ся количеством, которое, будучи умноженным на себя, дает то самое количество, из которого извлечен корень. И количество, получаемое умножением на себя, называется квадратом данного корня. Соответственно корень из 9 равен 3, корень из 16 равен 4, корень из 25 равен 5 и т. д.; а 9, 16, 25 называются квадратами.

И следует знать, что имеются такие количества, для которых нельзя назвать корней в точных числах. Так, для 10 нет такого числа, которое, будучи умноженным на себя, даст в точности 10; то же для 11, 12, 13 и им подобных. И поэтому возникают две разновидности корней: одни корни называются дискретными, т. е. рациональными, и это те, которым соответствуют точные числа, как корень из 9 это 3; а другие называются глухими, и это те, которые не выражаются в точных числах, как корень из 10, и другие. А иначе они называются иррациональными, что указывает на то, что все эти количества, которым не соответствуют точные числа, в искусстве берутся как иррациональные; а те, которым соответствует число, называются рациональными. И этого о корнях для нашей цели достаточно.

Глава X. **Еще о первом предложенном свойстве**

Отметим, что мы вернулись к первому предложенному свойству и прояснили его очевидными примерами. Для этого объяснения подходит все тот же пример 10, рассмотренный выше, и не надо изнурять себя другими трудными количествами, ибо всегда и в каждом случае будет обнаруживаться сказанное выше. Путем арифметики, с которой Ваша Светлость знакома лучше, все прочие количества берутся последовательно, и тем не менее для всего этого имеется научное доказательство, от которого наше рассмотрение уклонилось там, где наш философ Евклид обычно рассматривал все вместе геометрически, следуя возможным требованиям заключений.

Так я говорю, что 10 разделено согласно нашей пропорции, и его большей частью будет ℞125ⓜ5, к которой по данному действию прибавляется 5, т. е. половина целого 10, и получается ℞125, ведь ⓜ5 восстанавливается и восполняется через ꝑ5, половину от 10. И эта сумма ℞125 умножается на себя и в квадрате дает 125, который в 5 раз больше квадрата половины от 10, ведь эта половина равна 5, и ее квадрат равен 25. Так что 125 будет пятикратным в сравнении с квадратом 25 половины от 10, как уже было сказано. И это свойство имеет место для любого количества произвольной природы, как показано в предложении 1 книги XIII нашего предводителя.

Глава XI. **О ее втором существенном свойстве**

Если какое-либо количество разделено на две части, и к одной из них присоединено некое количество, так чтобы квадрат этой суммы был в пять раз больше квадрата присоединенного количества, то отсюда по необходимости следует, что данная присоединенная величина является половиной первоначальной величины, разделенной на две части, а та, к которой ее присоединили, является большей частью первоначальной величины, если только целое разделено согласно нашей пропорции[29].

К примеру, пусть частями целого являются 15m̃℞125 и ℞125m̃5, и к той, что равна ℞125m̃5, мы прибавим 5, третье количество. В сумме получится ℞125, и его квадрат равен 125; а квадрат прибавленного количества равен 25. Итак, 125 является пятикратным в сравнении с квадратом прибавленного количества. И ℞25, который есть 5, является половиной первоначальной величины, разделенной на две части; а та, к которой прибавляли, является большей частью данной первоначальной величины, разделенной в нашей пропорции, имеющей середину и два крайних, причем первоначальная величина была равна 10. И это следствие обратно предыдущему, что показывается геометрически в предложении 2 книги XIII.

Глава XII. **О ее третьем существенном свойстве**

Если какое-либо количество разделено согласно нашей пропорции и к меньшей части прибавлена половина большей, то квадрат суммы будет в пять раз больше квадрата половины большей части[30].

К примеру, пусть 10 есть количество, разделенное согласно нашей божественной пропорции, так что большая часть равна ℞125m̃5 и меньшая часть равна 15m̃℞125. Я утверждаю, что если к меньшей части 15m̃℞125 прибавить половину большей части ℞125m̃5, то сумма меньшей части и данной половины, умноженная на себя, будет в 5 раз больше квадрата половины данной большей части. Итак, половина от ℞125m̃5 есть ℞31$\frac{1}{4}$m̃2$\frac{1}{2}$, и, прибавленная к меньшей части 15m̃℞125, она дает 12$\frac{1}{2}$m̃℞31$\frac{1}{4}$; и при умножении 12$\frac{1}{2}$m̃℞31$\frac{1}{4}$ на 12$\frac{1}{2}$m̃℞31$\frac{1}{4}$ получается 187$\frac{1}{2}$m̃℞19531$\frac{1}{4}$. Это будет квадрат суммы. Теперь найдем квадрат половины большего количества, умножив ℞31$\frac{1}{4}$m̃2$\frac{1}{2}$ на ℞31$\frac{1}{4}$m̃2$\frac{1}{2}$, что дает 37$\frac{1}{2}$m̃℞781$\frac{1}{4}$, и это будет квадрат половины большего количества, что составляет $\frac{1}{5}$ от квадрата суммы. И данный квадрат суммы является пятикратным в сравнении с квадратом половины от большей части,

[29] Предложение 2 книги XIII.
[30] Предложение 3 книги XIII.

возникшей при разделении 10. Это же свойство может быть рассчитано и для многих других количеств, и оно доказывается геометрически в предложении 3 книги XIII нашего автора.

Глава XIII. **О ее четвертом особом свойстве**

Если какое-либо количество разделено согласно нашей божественной пропорции, и ко всему данному количеству прибавлена его большая часть, то данная названная сумма и данная большая часть будут частями нового количества, разделенного в той же пропорции, и большая часть этого нового количества всегда будет равна исходному количеству[31].

К примеру, если количество, разделенное по нашей единственной пропорции, равно 10, то его большая часть будет ℞125m̃5 и меньшая — 15m̃℞125. И если к исходному количеству 10 прибавить большую часть ℞125m̃5, получится новое количество ℞125p̃5. И это новое количество ℞125p̃5 подобным образом делится по нашей пропорции на две данные части, каковые суть ℞125m̃5, большая часть исходного количества, и 10, исходное количество и большая часть нового количества. Итак, произведение большей части исходного количества и меньшей части нового ℞125m̃5 на все новое количество ℞125p̃5 равно квадрату среднего члена, или, что то же самое, квадрату большей части нового количества, равного 10, и при умножении на себя оно дает в точности 100, как и должно быть по данной пропорции. И это свойство геометрически доказывается в предложении 4 [=5] книги XIII.

Глава XIV. **О ее пятом поразительном свойстве**

Если какое-либо количество разделено согласно нашей названной пропорции, то сумма квадрата меньшей части и квадрата всего количества всегда будет в три раза больше квадрата большей части[32].

К примеру, если 10 есть должным образом разделенное количество, то его часть 15m̃℞125 будет меньшей и его другая часть ℞125m̃5 будет большей. Я утверждаю, что квадрат 15m̃℞125 вместе с квадратом целого 10 будет трехкратным в сравнении с квадратом большей части ℞125m̃5. Итак, квадрат 15m̃℞125 равен 350m̃℞112500, и квадрат 10 равен 100, а с добавлением к нему 350m̃℞112500 в сумме получается 450m̃℞112500. А квадрат ℞125m̃5 равен 150m̃℞12500, что составляет $\frac{1}{3}$ указанной суммы, ведь если 150m̃℞12500 умножить на 3, получится

[31] Предложение 5 книги XIII.
[32] Предложение 4 книги XIII.

450m̃℞112500. Данная сумма трехкратна в сравнении с данным квадратом, как мы и говорили. И это свойство геометрически выводится в предложении 5 [=4] книги XIII.

Глава XV. **О ее шестом невероятном свойстве**

Никакое рациональное количество нельзя разделить по нашей пропорции так, чтобы каждая его часть не была иррациональной — так называемым вычетом[33].

К примеру, пусть 10 есть рациональное количество, разделенное согласно пропорции, имеющей середину и два края. Я утверждаю со всяческой необходимостью, что его части должны быть вычетами. Ведь меньшая часть равна 15m̃℞125, а большая равна ℞125m̃5; и каждая из них является вычетом, согласно определениям предложения 79 [=85] книги X. И это же свойство рассмотрено в предложении 6 книги XIII.

Глава XVI. **О ее седьмом невообразимом свойстве**

Если сторону равностороннего шестиугольника соединить со стороной равностороннего десятиугольника — а оба они вписаны в один и тот же круг — то их сумма всегда будет количеством, разделенным по нашей пропорции, при этом большей частью будет сторона шестиугольника[34].

К примеру, пусть сторона вписанного в круг равностороннего шестиугольника равна ℞125m̃5, и сторона вписанного в тот же круг равностороннего десятиугольника равна 15m̃℞125. Диаметр этого круга равен ℞500m̃10. Я утверждаю, что сумма ℞125m̃5 и 15m̃℞125, равная 10, разделена по нашей пропорции, и ее большая часть равна ℞125m̃5, а меньшая часть равна 15m̃℞125, как уже не раз было сказано о делении 10. А в предложении 9 книги XIII это доказывается геометрически.

Глава XVII. **О ее восьмом свойстве, обратном предыдущему**

Если линия разделена согласно пропорции, имеющей середину и два края, то всегда в таком круге, где большая часть является стороной шестиугольника, меньшая часть будет стороной десятиугольника.

К примеру, пусть разделенная линия равна 10, и ее большая часть равна ℞125m̃5, и эта часть всегда будет стороной шестиугольника, вписанного в круг, диаметр которого равен дважды ℞125m̃5, т. е. ℞500m̃10.

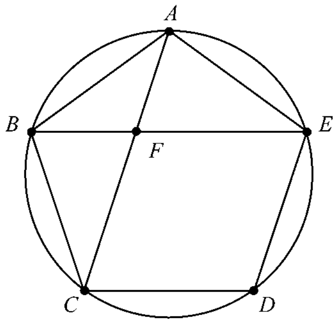
[33] Предложение 6 книги XIII.

[34] Предложение 9 книги XIII.

Я утверждаю, что в этом же круге меньшая часть 15ⓜ℞125 будет стороной размещенного в нем равностороннего десятиугольника. И это обращение многократно используется Птолемеем в части 9 первого отдела *Альмагеста* для отыскания величины хорды дуги круга, и на основе предложения 9 книги XIII оно легко доказывается геометрически.

Глава XVIII. **О ее девятом свойстве, вытекающем из предыдущих**

Если в круг вписать равносторонний пятиугольник и соединить прямыми линиями концы сторон двух соседних углов, то они обязательно разделятся при пересечении по нашей пропорции, и каждая бóльшая часть будет равна стороне нашего пятиугольника[35].



К примеру, пусть имеется пятиугольник $ABCDE$, и пусть концы C и A соединены хордой AC, стягивающей угол B, а концы B и E соединены хордой BE, стягивающей угол A. Я утверждаю, что две линии AC и BE делятся в точке F в пропорции, имеющей середину и два края, и что большая часть каждой линии в точности равна стороне пятиугольника. Итак, большей частью линии AC является CF, и большей частью линии BE является EF, и каждая из них равна стороне данного пятиугольника. И математики говорят о двух линиях, а иначе они называются хордами угла в пятиугольнике.

И пусть каждая такая хорда будет равна 10, ведь хорды в правильном вписанном пятиугольнике равны между собой, и часть CF будет равна ℞125ⓜ5, а часть AF будет равна 15ⓜ℞125, и часть EF будет также равна ℞125ⓜ5, а часть BF будет равна 15ⓜ℞125, и сторона пятиугольника будет также равна ℞125ⓜ5. Все это замечательно доказывается геометрически в предложении 11 [=8] книги XIII.

Это следствие позволяет нам по данной стороне отыскать все хорды и все их части. И, обратно, по данной хорде мы можем найти сторо-

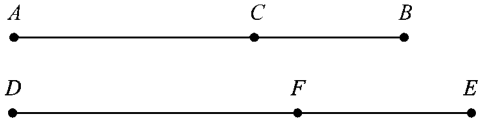
[35] Предложение 8 книги XIII. Иллюстрации к трактату Пачоли, сделанные Леонардо да Винчи, воспроизводятся в современной компьютерной обработке.

ну пятиугольника и части данной хорды, действуя арифметически и геометрически, как это показано в нашем уже опубликованном сочинении, со всем старанием в двучленах и других иррациональных линиях, о которых наш философ говорит в книге X. А в линиях в предложении 11 книги II и в предложении 29 [=30] книги VI показано, как одно значение всеми способами легко определяется по другому, что имеет величайшую пользу в наших научных и спекулятивных занятиях.

Глава XIX. **О ее десятом наивысшем свойстве**

Если какая-либо величина разделена согласно указанной пропорции, то все свойства, которые могут быть получены из ее частей, окажутся теми же самыми по числу, виду и роду со свойствами любой другой так же разделенной величины.

К примеру, пусть имеются две так разделенные линии: линия AB, разделенная в C, причем ее большая часть равна AC, и линия DE, разделенная в F, причем ее большая часть равна DF. И что будет сказано об этих двух линиях, можно будет сказать и о бесчисленном множестве других, легко получаемых арифметическим путем. Положим AB равным 10, и пусть AC составит ℞125ⓜ5, а другая часть будет равна 15ⓜ℞125; и положим DE равным 12, и пусть DF составит ℞180ⓜ6, а другая часть будет равна 18ⓜ℞180.



Я утверждаю, что все, что можно получить для одной из этих линий сопоставлением, умножением, разделением и всеми другими способами, схожим образом всегда проявится и в другой линии: ведь каждая из больших частей образует одну и ту же пропорцию, а потому и каждая из меньших частей будет иметь ту же самую пропорцию. И то же для обратного отношения каждой из частей к целому, и то же для произведения целого и одной из частей, и обратно, для данных частей; и то же при разделении и вычитании каждой части. Так пропорция, которую 10 имеет к своей большей части ℞125ⓜ5, будет той же самой, какую 12 имеет к своей большей части ℞180ⓜ6; и пропорция, в которой сумма 10 и ℞125ⓜ5 относится к ℞125ⓜ5, будет той же самой, в какой сумма 12 и ℞180ⓜ6 относится к ℞180ⓜ6.

И так, короче говоря, до бесконечности при любом по способу и качеству изменении — перестановке, обращении, соединении, разделении, прямой и обратной пропорциональности — всегда будет иметь место одно и то же обозначение и одни и те же интенсивные следствия, что безусловно свидетельствует о величайшей гармонии во всех разделенных таким образом количествах, как это будет разъяснено ниже в отношении правильных и зависимых тел. И все это доказывается геометрически в предложении 2 книги XIV[36].

Глава XX. **О ее одиннадцатом, великолепном свойстве**

Если разделить сторону равностороннего шестиугольника согласно нашей божественной пропорции, то ее большая часть всегда по необходимости будет стороной десятиугольника, вписанного в тот же круг, что и шестиугольник.

К примеру, пусть сторона шестиугольника 10 разделена названным способом, и ее большая часть ℞125ⓜ5 будет точно равна стороне десятиугольника, вписанного в тот же круг, что и шестиугольник, диаметр коего равен 20. И это выводится на основании предложения 3 книги XIV[37]. Отсюда ясно, что если имеется сторона одного, то легко найти и сторону другого, и равным образом, имея диаметр круга или его окружность, или его площадь, или иную его часть, мы всегда можем найти одно через другое и обратно, всеми способами по кругу найти шестиугольник, десятиугольник, а еще нужный треугольник, действуя арифметически и геометрически. Этот последний вывод служит добавлением к девятому свойству, связанному с пятиугольником, и т. д.

Глава XXI. **О ее двенадцатом, трудновообразимом свойстве**

Если какое-либо количество разделено согласно нашей пропорции, то всегда корень из суммы квадрата всего количества и квадрата его большей части будет в той же самой пропорции к корню из суммы квадрата данного количества и квадрата его меньшей части, как сторона куба к стороне треугольника тела, имеющего 20 оснований[38].

К примеру, пусть 10 — это количество, разделенное согласно пропорции, имеющей середину и два края, и большая часть, как много раз было сказано, равна ℞125ⓜ5, а меньшая часть равна 15ⓜ℞125. Квадрируем, т. е. умножим на самое себя, данное количество, равное 10; получится 100. Теперь квадрируем его большую часть ℞125ⓜ5, умножив ее на саму себя, получим 150ⓜ℞12500; квадрируем также его меньшую часть 15ⓜ℞125, умножив ее на саму себя, получим 350ⓜ℞112500. К квадрату большей части, т. е. к 150ⓜ℞12500, прибавим квадрат всей величины, т. е. квадрат 10, равный 100; получится 250ⓜ℞12500. К тому

[36] Непонятно, как это соответствует разбивке книги XIV на предложения в редакции Гейберга.
[37] Отсылка к книге XIV маловразумительна.
[38] Предложение 7 книги XIV.

же квадрату всей величины, равному 100, прибавим квадрат меньшей части 350m̃℞112500; в сумме со 100 получается 450m̃℞112500. Я утверждаю, что пропорция между корнем суммы, равной 250m̃℞12500, и составленной из квадратов данного количества и его большей части, и корнем другой суммы, составленной из квадратов данного количества и его меньшей части, и равной 450m̃℞112500, в точности та же самая, что и пропорция между стороной куба и стороной треугольника тела с 20 основаниями, когда оба тела описаны вокруг одной и той же сферы, либо оба вписаны в нее.

Эти корни из сумм называются *степенными линиями* данных сумм: ℞250m̃℞12500 следует называть количеством, степень которого получается образованием квадрата; и ℞450m̃℞112500 следует называть количеством, степень которого является квадратом, в точности равным 450m̃℞112500. На практике эти корни иначе называются универсальными корнями, т. е. законными корнями, что обсуждается в нашем предыдущем сочинении в различении 8 трактата III, начиная со страницы 120 названного тома. Эти количества вносят в спекулятивную практику тончайшее различение и обличие, о чем пространно говорится в указанном томе. И эти количества, о сиятельный князь, нельзя назвать более подробными именами; и это спекулятивное свойство доказывается геометрически в предложении 9 [=7] книги XIV, с некоторыми другими, добавленными в этом месте Кампано.

Глава XXII. **О ее тринадцатом, достойнейшем свойстве**

Это тринадцатое свойство вызывает немалое восхищение, поскольку без него никак нельзя образовать пятиугольник, т. е. фигуру с пятью равными сторонами, как было показано в девятом следствии и как это будет рассмотрено далее. Без этого пятиугольника, как будет сказано, нельзя ни образовать, ни представить самое благородное тело среди всех правильных тел — додекаэдр, т. е. тело из 12 равносторонних и равноугольных пятиугольников, иначе называемое телом с 12 пятиугольными основаниями, форму которого, как будет сказано, божественный Платон приписал Пятой Сущности, т. е. Небу, на соответствующих основах. Так в предложении 10 книги IV наш философ установил такое условие, связанное с неким треугольником: каждый из двух его углов, прилежащих к основанию, в два раза больше оставшегося угла. И пусть это условие выполнено, но если мы захотим построить равносторонний и равноугольный пятиугольник, вписанный в круг или описанный около него, поместив его внутри или снаружи круга, это не будет возможно, пока мы не научимся строить указанный треугольник, как об этом сказано в предложениях 11 и 12 книги IV.

И чтобы построить такой треугольник, нужно разделить линию согласно нашей божественной пропорции, как это показано в предложении 10 книги IV, хотя в этом месте и не говорится о разделении линии согласно данной пропорции и ее условиям, поскольку еще не приведено определение пропорции, оставленное до книги V, ведь не в его обычае использовать в доказательствах такие вещи, для которых еще не приведено определение. Но всегда используются только предыдущие факты, и этот порядок принят на протяжении всех пятнадцати книг. И хотя в связи с данным треугольником не говорится о разделении линии согласно пропорции, имеющей середину и два края, однако, следуя предложению 11 книги II, речь идет о построении двух таких частей, квадрат одной из которых равен произведению другой части на всю данную линию. Но ведь это не что иное, как разделение согласно данной пропорции, что показано в определении 3 книги VI и в ее предложении 29 [=30]. И хотя здесь об этом и не говорится, тем самым проясняется понимание ее середины и краев, согласно первому названному свойству.

Глава XXIII. **Как во имя нашего блага завершаются эти свойства**

Я не считаю нужным, Светлейший герцог, останавливаться здесь на дальнейших нескончаемых свойствах, чтобы от их выражения не почернела бумага. Из них мы выбрали только тринадцать, из почтения к собранию двенадцати и их священнейшего главы — нашего Искупителя Иисуса Христа, поскольку им приписано божественное имя, закончив их ради нашего блага по числу двенадцати Статей и двенадцати Апостолов во главе с нашим Спасителем. Полагаю, что Ваше Герцогское Величество питает особое почтение к этому собранию, знаком чего служит священнейший храм де Грацие, украшенный блестящей кистью нашего знаменитого Леонардо. Кроме того, нет нужды излагать ниже прочие свойства, поскольку, как будет показано, без них невозможно ни образовать, ни вообразить гармонию и должное соотношение между всеми правильными и зависимыми от них телами, с каковой целью мы их здесь и изложили, чтобы прояснить то, что из них вытекает.

Глава XXIV. **Как данные свойства участвуют в построении правильных тел**

Итак, светлейший герцог, сила и возможности нашей пропорции с ее исключительными свойствами, о которых сказано выше, проявляются в образовании и составлении тел, как правильных, так и зависимых от них. Для лучшего понимания мы будем говорить о них в строгой последовательности; сначала о пяти главных, которые иначе называются правильными, а потом о других, заметно отличных и зависимых от первых.

Но прежде всего надо прояснить, почему они называются правильными телами, и нужно доказать, что от природы невозможно образовать шестое такое тело. Итак, указанные тела называются правильными, потому что у них равные стороны, углы и основания, и при этом каждое из них содержится в другом, как это будет показано, и они соответствуют пяти простым телам в природе, каковые суть земля, вода, воздух, огонь и пятая сущность — Небесная Сила, заключающая в себе все прочие тела. И подобно тому, как природе достаточно этих пяти тел — иначе нужно предположить, что Бог либо преувеличил, либо преуменьшил естественную необходимость, что абсурдно, ибо, как утверждает философ, Бог и Природа не действуют напрасно, т. е. не превышают необходимого и не преуменьшают его, — так и форм этих пяти тел, о которых пойдет речь, а их всего пять ради украшения вселенной, не может быть больше по причине, о которой речь пойдет ниже. И потому вполне заслуженно, как об этом будет сказано, древний Платон в своем *Тимее* приписывает фигуры этих пяти правильных тел пяти простым телам, о чем уже говорилось в связи с пятым соответствием между божественным именем и нашей пропорцией. И у них будет столько же наименований.

Глава XXV. **Почему не может существовать более пяти правильных тел**

Теперь нам следует показать, почему в природе не может существовать больше пяти таких тел, у которых все основания равны между собой и все телесные и плоские углы равны, и стороны также равны. Это связано с тем, что при построении каждого телесного угла нужно составлять вместе по меньшей мере 3 плоских угла, поскольку 2 плоских угла телесный угол не образуют. Итак, 3 угла каждого равностороннего шестиугольника равны 4 прямым углам, а в семиугольнике, фигуре с 7 сторонами, и в всякой равносторонней и равноугольной фигуре с большим числом сторон 3 угла всегда будут больше 4 прямых, что прямо следует из предложения 32 книги I. Однако всякий телесный угол меньше 4 прямых, что подтверждается в предложении 21 книги XI, и потому невозможно, чтобы 3 угла шестиугольника, семиугольника и произвольной равносторонней и равноугольной фигуры с большим числом углов составляли телесный угол. Отсюда следует, что никакая равносторонняя и равноугольная фигура не может быть составлена из плоскостей шестиугольных и с большим числом сторон; ведь из того, что 3 угла равностороннего и равноугольного шестиугольника превышают телесный угол, следует, что 4 таких угла и более будут превосходить телесный угол еще сильнее.

Итак, 3 угла равностороннего и равноугольного пятиугольника меньше 4 прямых, а 4 — больше 4 прямых. А потому из 3 углов равностороннего и равноугольного пятиугольника телесный угол составить можно, но из 4 или большего их числа составить телесный угол уже невозможно. И когда составляется тело из равносторонних и равноугольных пятиугольников, получается так называемый додекаэдр, иначе говоря — тело из 12 пятиугольников, известное философам, в котором углы пятиугольников соединяются по 3, образуя и формируя все телесные углы данного тела.

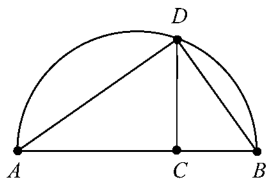
Это рассуждение для пятиугольника может быть применено и к четырехсторонней фигуре с равными сторонами и углами. Ведь всякая четырехсторонняя фигура с равными сторонами и углами по определению будет квадратом, а потому все ее углы будут прямыми, как показано в предложении 32 книги I. Из 3 плоских углов этой фигуры также можно составить телесный угол, а из 4 и большего числа — нельзя. По этой причине плоские фигуры, являющиеся равносторонними четырехсторонниками с равными углами, охватывают тело, которое мы называем кубом, и которое, будучи составленным из 6 квадратных плоскостей, имеет 12 сторон и 8 телесных углов.

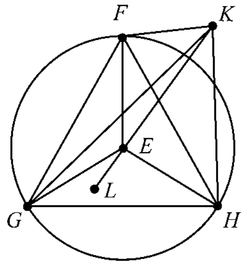
А в равносторонних треугольниках 6 углов равны 4 прямым по предложению 32 книги I; но меньше 6 углов — это меньше 4 прямых, а больше 6 — это больше 4 прямых, так что из 6 и более одинаковых треугольников составить телесный угол нельзя; однако из 5, 4 или 3 — можно. И когда 3 угла равностороннего треугольника охватывают телесный угол, эти равносторонние треугольники образуют тело с 4 треугольными равносторонними основаниями, так называемый тетраэдр. Когда же составляются вместе 4 таких треугольника, образуется тело с 8 основаниями, называемое октаэдром; и если 5 равносторонних треугольников охватывают телесный угол, тогда образуется тело, называемое икосаэдром, с 20 треугольными основаниями и равными сторонами. И вот имеются правильные тела, определенные по форме и числу, и их не может быть больше, что мы здесь ясно показали.

Глава XXVI. **О построении и составлении пяти правильных тел, и о пропорции между этими телами и сферой**

Ясно, поскольку правильные тела по числу таковы, как мы говорили, самое время сказать, как они образуются, чтобы точно вписать их в сферу, и каковы пропорции и обозначения их сторон в отношении к диаметру охватывающей их сферы, следуя тому, что содержится в их определениях. Сначала мы поговорим о тетраэдре, т. е. о теле с 4 равносторонними треугольными основаниями, а потом последовательно — обо всех остальных, в установленном порядке.

Я утверждаю, что данное тело надлежит строить так[39]: сперва отложим диаметр сферы, которой мы собираемся его охватить, и пусть это будет линия AB. Затем разделим этот диаметр в точке C таким образом, чтобы часть AC была вдвое больше части BC. Построим полукруг ADB и восстановим к линии AB перпендикуляр CD, а затем проведем линии BD и DA. Построим круг FGH с центром E, полудиаметр которого равен линии CD. Затем впишем в этот круг равносторонний треугольник, следуя предложению 2 книги VI, и пусть это будет треугольник FGH. Из центра к его углам проведем линии EF, EG, EH. Затем из центра E восстановим линию EK перпендикулярно плоскости круга FGH, следуя предложению 12 книги XI, и положим этот перпендикуляр равным линии AC, а из точки K проведем гипотенузы KF, KG, KH. И вот построена пирамида с 4 треугольными основаниями и с одинаковыми сторонами; которую требовалось охватить сферой диаметра AB. Я утверждаю, что по пропорции между диаметром сферы и стороной построенной пирамиды квадрат данного диаметра в полтора раза больше квадрата данной пирамиды, т. е. квадрат диаметра содержит квадрат стороны один раз и еще половину, как 3 и 2 или 6 и 4. Иначе говоря, если квадрат диаметра будет равен 6, то квадрат стороны пирамиды будет равен 4. И все это доказывается в геометрии.





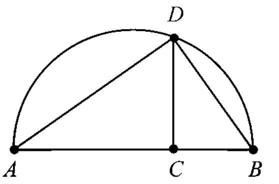
Глава XXVII. **О построении куба и его пропорции со сферой**

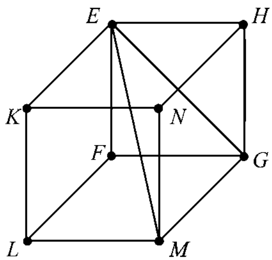
Далее мы покажем, как построить куб и какова пропорция между его стороной и диаметром сферы, в которую он вписан[40]. Я утверждаю, что названный куб строится так: сперва отложим диаметр сферы, которой мы собираемся его охватить, и пусть это будет линия AB, на которой мы построим полукруг ADB. Затем разделим диаметр в

[39] Предложение 13 книги XIII.

[40] Предложение 15 книги XIII.

точке C, как мы это делали при построении пирамиды, чтобы часть AC была вдвое больше части BC. Восстановим к линии AB перпендикуляр CD, а затем проведем линии BD и DA. Построим квадрат со сторонами, равными линии BD, и пусть это будет квадрат $EFGH$. Из четырех его углов восставим 4 перпендикуляра к плоскости данного квадрата, следуя предложению 12 книги XI, и пусть все эти 4 перпендикуляра будут равны линии BD, так что получится 4 данных перпендикуляра EK, FL, GM, HN. Все эти 4 перпендикуляра будут параллельными, согласно предложению 6 книги XI. Их углы с прилежащими сторонами квадрата будут прямыми, по определению линии, перпендикулярной к плоскости. Чтобы соединить концы этих перпендикуляров, проведем линии KL, LM, MN, NK. И если все построено надлежащим образом, получится куб, заключенный между 6 квадратными плоскостями, что доказывается в предложении 34 книги I[41]. Четыре охватившие его плоскости, противоположные стороны которых являются 4 перпендикулярами, все суть квадраты. Его основание будет квадратным, как заявлено в нашем построении; и противоположная плоскость $KLMN$ тоже будет квадратной, что следует из предложения 34 книги I и из предложения 10 книги XI. А из предложения 4 книги XI следует, что все стороны данного куба будут ортогональны к двум противоположным плоскостям. Тем самым сфера предложенного диаметра будет описанной. Ведь диаметр в степени всегда троекратен к стороне данного куба, т. е. квадрат данного диаметра в 3 раза





больше квадрата стороны куба. Так, если диаметр равен ℞300, сторона куба будет в точности равна 10. Эти сведения пригодятся во многих случаях.

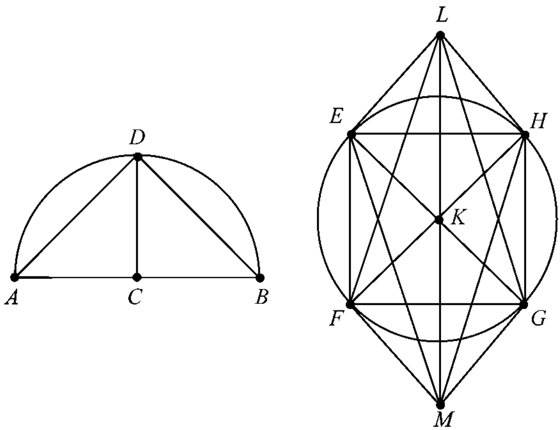
Глава XXVIII. **Как построить октаэдр, точно вписанный в сферу, и о его пропорции со сферой**

Третьим составляется тело с 8 треугольными основаниями, называемое октаэдром, которое легко вписывается в предложенную сферу с данным диаметром. Оно строится следующим способом[42]. Отложим

[41] Отсылка маловразумительна.

[42] Предложение 14 книги XIII.

диаметр сферы, которым будет линия AB, разделим его пополам точкой C, и на всей линии построим полукруг ADB. Проведем перпендикуляр CD к линии AB, и соединим точку D с концами данного диаметра, т. е. с A и B. Далее, построим квадрат, все стороны которого равны линии BD, и пусть это будет квадрат $EFGH$. В этом квадрате проведем две диагонали, из которых одна есть EG, а другая FH, и они делятся точкой K, причем по предложению 4 книги I доказывается, что каждая из этих диагоналей равна линии AB, которая представляет собой диаметр сферы, и угол D является прямым по первой части предложения 30 [=31] книги III. Каждый из углов E, F, G, H будет прямым по определению квадрата, и показывается, что эти две диагонали EG и FH делят друг друга на равные части точкой K, что легко выводится из предложений 5, 32 и 6 книги I. Теперь восставим из K перпендикуляр KL к плоскости квадрата, положив его равным половине диагонали EG или же FH, а затем соединим гипотенузы LE, LF, LG, LH. Все эти гипотенузы по указанной причине и опосредующей предпосылке, т. е. по предпоследнему предложению книги I[43], воспроизведенной столько раз, сколько нужно, равны между собой и равны стороне квадрата.



И вот, мы имеем пирамиду с 4 треугольными основаниями и равными сторонами, построенную на указанном квадрате, каковая пирамида является половиной тела с 8 основаниями, которое мы намереваемся построить. Далее, на данном квадрате построим другую пирамиду, схожую с этой, следующим способом: продолжим данную линию LK по другую сторону данного квадрата до точки M, чтобы линия KM, которая находится под квадратом, была бы равна линии LK, находящейся над указанным квадратом. Затем соединим точку M со всеми

[43] По теореме Пифагора.

углами квадрата, поведя 4 другие гипотенузы *ME*, *MF*, *MG*, *MH*, и уже доказано, что они равны между собой и равны сторонам данного квадрата по предпоследнему предложению книги I, и равны тем, которые сверху, как это было доказано для других гипотенуз, находящихся сверху квадрата. И со всегдашним прилежанием Вы увидите вышеуказанные вещи, и будет завершено тело с 8 треугольными основаниями и равными сторонами, которое в точности вписано в сферу.

Пропорция между сферой и данным телом такова, что квадрат на диаметре сферы является двойным по отношению к квадрату на стороне данного тела, а именно: если данный диаметр взять равным 8, то сторона 8 оснований будет равна ℞32, так что их степени состоят в двойной пропорции. А именно квадрат диаметра является двойным в сравнении с квадратом стороны данного тела; и мы имеем составление и пропорцию в отношении к сфере.

Глава XXIX. **О построении тела, называемого икосаэдром**

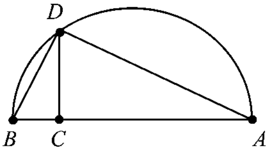
Составить тело с 20 треугольными равносторонними основаниями, вписанное в данную сферу с рациональным диаметром или встроенное в нее. И сторона данного тела будет иррациональной — так называемой *меньшей линией*[44].

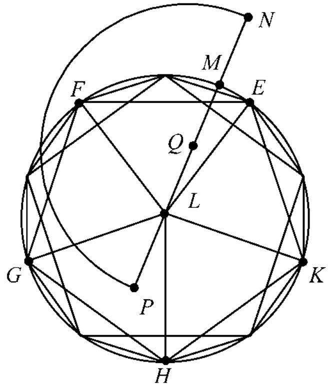
К примеру, пусть диаметр данной сферы будет *AB*, и мы положим его рациональным по длине или только в степени (in la potenza)[45]. Разделим его точкой *C* так, чтобы *AC* была четырехкратной, т. е. в четыре раза большей в сравнении с *CB*, и построим на нем полукруг *ADB*; затем восстановим к *AB* перпендикуляр *CD* и проведем линию *DB*. Далее, согласно величине линии *DB* опишем около центра *L* круг *EFGHK*, в который впишем равносторонний пятиугольник с названными вершинами. К его углам из центра *L* проведем линии *LE*, *LF*, *LG*, *LH*, *LK*. Затем построим равносторонний десятиугольник с тем же центром. Для этого разделим пополам все дуги, хорды которых являются сторонами пятиугольника, и из средних точек к концам всех сторон вписанного пятиугольника проведем прямые линии. Изо всех углов данного пятиугольника восставим катеты, т. е. перпендикуляры, следуя предложению 12 книги XI, чтобы каждый из них был равен линии *BD*. Соединим концы этих 5 катетов 5 стяжками; согласно предложению 6 книги XI 5 восставленных катетов будут параллельными, а поскольку они равны между собой, по предложению 33 книги I 5 стяжек, соединяющих их концы, будут равны сторонам пятиугольника.

[44] Предложение 16 книги XIII.

[45] Рациональные по длине отрезки имеют общую меру. Рациональные только в степени, сами они общей меры не имеют, но зато общую меру имеют построенные на них квадраты.

Теперь из вершины каждого катета опустим по две гипотенузы к двум соседним углам вписанного десятиугольника, соединив 5 концов катетов с 5 точками, являющимися промежуточными углами вписанного десятиугольника и образующими в данном круге другой пятиугольник, который также будет равносторонним по предложению 23 [=29] книги III. И когда это будет сделано, мы увидим, что построено 10 треугольников, сторонами которого служат 10 гипотенуз, 5 стяжек и 5 сторон вписанного пятиугольника.





Покажем, что эти треугольники являются равносторонними. Полудиаметр описанного круга таков, что каждый из восставленных катетов по условию равен линии BD. Далее, по следствию из предложения 15 книги IV каждый из катетов равен стороне равностороннего шестиугольника, вписанного в круг с диаметром, равным линии BD. И поскольку по предпоследнему предложению книги I каждая из десяти гипотенуз в степени превышает катет на сторону десятиугольника, а по предложению 10 книги XIII сторона пятиугольника в степени превышает ту же самую [сторону шестиугольника] на ту же самую сторону десятиугольника, тем самым по общему заключению каждая такая гипотенуза равна стороне пятиугольника.

Уже показано, что стяжки равны сторонам пятиугольника. Итак, все стороны этих 10 треугольников равны сторонам равностороннего пятиугольника, вписанного в круг во второй раз. Теперь из центра круга, которым является точка L, восставим другой катет LM, равный первому, и его верхний конец — т. е. точку M — соединим с концами каждой из 5 первых стяжек; и по предложению 6 книги XI этот центральный катет, восставленный из центра, будет параллелен всем угловым катетам. И по предложению 33 книги I эти 5 стяжек будут равны полудиаметру круга, а по следствию из предложения 15 книги IV каждая из них будет равна стороне шестиугольника. Далее, названный центральный катет с обоих концов продолжим на линию, равную стороне десятиугольника, т. е. сверху на линию MN, а снизу от центра круга на линию LP. Теперь из точки N протянем 5 гипотенуз к 5 верхним углам 10 треугольников, расположенных по кругу, а из точки P — другие 5 к другим 5 нижним углам. И эти 10 гипотенуз будут равны сторонам вписанного пятиугольника по предпоследнему предложению книги I и по предложению 10 книги XIII, как и 10 других, для которых это было показано раньше.

И вот имеется тело с 20 треугольными равносторонними основаниями, все стороны которого равны стороне пятиугольника, и его диаметром служит линия NP. Из этих 20 треугольников 10 расположены по хороводу прямо над кругом, 5 подняты выше этих к точке N, а другие 5 опущены ниже круга к точке P. Это тело называется икосаэдром, и оно в точности вписано в данную сферу, как будет показано ниже. Поскольку линия LM равна стороне шестиугольника, и линия MN — стороне десятиугольника, каковые равносторонние фигуры обе вписаны в круг EFG, вся линия LN по предложению 9 книги XIII делится точкой M в пропорции, имеющей середину и два края, и ее большей частью будет линия LM.

Разделим далее LM на равные части точкой Q, и PQ будет, по общей науке, равно QN; но PL равна стороне десятиугольника, как и MN; и вот QN будет половиной NP, как и QM — половиной ML. Далее, квадрат NQ по предложению 3 книги XIII будет пятикратным в сравнении с квадратом QM; и по предложению 15 книги V квадрат PN будет пятикратным в сравнении с квадратом LM. По предложению 4 книги II квадрат PN будет четырехкратным в сравнении с квадратом QN, и по тому же предложению квадрат LM будет четырехкратным в сравнении с квадратом QM. Но четырехкратное — к четырехкратному, как единичное к единичному, по предложению 15 книги V. И квадрат AB будет в пять раз больше квадрата BD по второй части следствия из предложения 8 книги VI и по следствию из предложения 17 той же книги; и AB в пять раз больше BC, а AC — в четыре раза. Далее, поскольку LM по условию равна BD, AB, по общей науке, будет равна NP. Итак, построим на линии NP полукруг; и когда он, совершив оборот, вернется туда, откуда начал двигаться, сфера, описанная его движением, будет — по определению равных сфер — равна данной сфере.

Далее, поскольку линия LM является средней пропорциональной между LN и NM, и тем самым между LN и LP, и поскольку каждый полудиаметр круга будет средним пропорциональным между LN и LP, тем самым LM будет равна полудиаметру круга. И вот полукруг, совершив оборот около PN, пройдет через все точки окружности круга EFG, и тем самым через все углы построенного тела, расположенные на этой окружности. И поскольку по тому же доводу все стяжки, соединяющие концы угловых катетов с концами центрального катета, являются средними пропорциональными между PM и MN, тем самым каждая из них равна LM, откуда следует, что тот же самый полукруг пройдет через все прочие углы построенного икосаэдра.

И вот это тело вписано, т. е. встроено в сферу диаметром PN и тем самым в сферу диаметром AB. Я утверждаю, что сторона этой телесной фигуры является *меньшей линией*, поскольку утверждается, что линия BD является рациональной в степени, и ее квадрат составляет пятую часть квадрата линии AB, рациональной по длине или только в степени. И вот полудиаметр — и полудиаметры — круга EFG будет рациональным в степени, поскольку полудиаметр равен BD. Далее, по предложению 12 [=11] книги XIII сторона равностороннего пятиугольника, вписанного в такой круг, будет *меньшей линией*; но по ходу этого доказательства было показано, что сторона данной фигуры будет стороной пятиугольника. Тем самым сторона фигуры с двадцатью равносторонними треугольными основаниями будет *меньшей линией*, что было заявлено вначале.

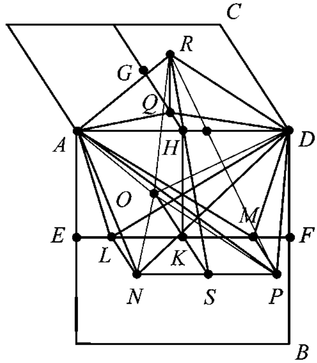
Глава XXX. **О достойнейшем твердом теле, называемом додекаэдром**

Составить тело с 12 пятиугольными равносторонними и равноугольными основаниями, встроенное в данную сферу, т. е. или вписанное в нее. И сторона данного тела будет иррациональной — так называемым *вычетом*[46].

Составим куб согласно рассмотренному способу так, чтобы указанная сфера в точности его описывала, возьмем в этом кубе две плоскости AB и AC, и представим, что AB будет верхней плоскостью этого куба, а AC — одной из боковых плоскостей, и линия AD будет общей у этих двух плоскостей. Далее, на плоскости AB разделим пополам две ее противоположные стороны, а именно сторону DB и противоположную ей, и соединим точки деления линией EF. Затем разделим пополам сторону AD и противоположную ей на плоскости AC, и соединим точки деления прямой линией, половина которой есть GH, и точка H будет средней точкой линии AD. Сходным образом разделим линию EF пополам точкой K и проведем HK.

Каждую из трех линий EK, KF и GH разделим в пропорции, имеющей середину и два края, в трех точках L, M, Q, чтобы большими частями были LK, KM и GQ; и эти части равны между собой, поскольку равны и разделенные линии, ведь каждая из них равна половине

[46] Предложение 17 книги XIII.



стороны куба. Затем из двух точек L и M восставим перпендикуляры — следуя предложению 12 книги XI — к плоскости AB, и каждый из них положим равным линии KL, и это будут LN и MP. Подобным образом из точки Q восставим перпендикуляр QR к плоскости AC, который положим равным GQ. Далее проведем линии AL, AN, AM, AP, DM, DP, DL, DN, AR, AQ, DR, DQ. И вот утверждается, по предложению 4 книги XIII, что вместе взятые в степени линии KE и EL будут в три раза больше линии KL; это же относится к линии LN, поскольку линии KL и LN равны. И теперь KE равна EA; тем самым две вместе AE и EL, взятые в степени линии, будут в три раза больше линии LN. Итак, по предпоследнему предложению книги I AL в степени будет в три раза больше LN, и по тому же самому предложению, AN в степени будет в четыре раза больше LN. Но всякая линия в степени в четыре раза больше своей половины, следовательно, по общей науке, AN будет по длине в два раза больше LN. И поскольку LM в два раза больше LK, а KL и LN равны, AN будет равна LM, ведь их половины равны. И поскольку по предложению 33 книги I LM равна NP, тем самым AN будет равна NP. И по тому же самому доказательству три линии PD, DR и RA будут равны друг другу и двум вышеназванным.

Итак, из этих 5 линий составлен равносторонний пятиугольник AN-PDR. Но Вы можете сказать, что это никакой не пятиугольник, поскольку они не лежат в одной плоскости, что необходимо для того, чтобы он был пятиугольником. И то, что они лежат в одной плоскости, устанавливается так. Проведем из точки K линию KS перпендикулярно к плоскости AB, чтобы она была равна LK. И она будет равна каждой из линий LN и MP. Но она параллельна каждой из них по предложению 6 книги XI, и обе они лежат в одной плоскости, по определению параллельных линий, поэтому необходимо, чтобы точка S лежала на линии NP и делила ее пополам. Проведем две линии RH

и HS, и построим снаружи [двугранного] угла KHQ два треугольника KSH и QRH. И будет в пропорции KH к QR как KS к QH; ведь GH к QR как KH к QR, по предложению 7 книги V, и RQ к QH как KS к QH, по тому же самому предложению, но GH к QR как QR к QH, поскольку QR равна GQ. Далее, по предложению 30 [=32] книги VI линия RHS будет одной прямой линией. И по предложению 2 книги XI весь рассматриваемый пятиугольник лежит в одной плоскости.

Я утверждаю, что он также будет равноугольным. Ведь EK разделена в пропорции, имеющей середину и два края, и KM равна ее большей части; тем самым по предложению 5 книги XIII вся EM также разделена в пропорции, имеющей середину и два края, и ее большей частью будет линия EK. И по предложению 4 книги XIII две линии EM и EK — и также две линии EM и MP, поскольку MP равна EK, — вместе в степени будут в три раза больше линии EK — и также линии AE, ведь AE равна EK. Итак, три линии AE, EM и MP вместе в степени будут в четыре раза больше линии AE. Но по дважды примененному предпоследнему предложению книги I линия AP в степени равна трем линиям AE, EM и MP. Итак, AP в степени будет в четыре раза больше линии AE. Но и сторона куба, вдвое большая линии AE, будет в степени в четыре раза больше этой линии по предложению 4 книги II. Тем самым, по общей науке, AP будет равна стороне куба; и поскольку AD является одной из сторон куба, AP будет равна AD; и по предложению 8 книги I угол ARD будет равен углу ANP. Таким же способом ты сможешь доказать, что угол DPN равен углу DRA, поскольку ты докажешь, что линия DN в степени будет в четыре раза больше половины стороны куба. И поскольку по уже доказанному пятиугольник является равносторонним и имеет 3 равных угла, он является равноугольным по предложению 7 книги XIII.

И вот, когда сходным образом мы построим на каждой стороне куба по равностороннему и равноугольному пятиугольнику, тем самым образуется тело, охваченное 12 равносторонними и равноугольными пятиугольниками, ибо у куба 12 сторон.

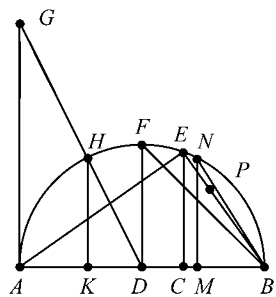
Осталось доказать, что это тело является точно вписанным в данную сферу, а это выясняется так. Проведем через линию SK две плоскости, делящие куб: одна из них пройдет через линию HK, а другая через линию EF. И по предложению 40 [=38] книги XI линия общего сечения этих двух плоскостей делит диаметр куба пополам, и обратно, сама она делится диаметром на равные части. Линия общего сечения KO оканчивается на диаметре куба в точке O, которая будет центром куба; мы проведем из этой точки линии OA, ON, OP, OD, OR. И ясно, что каждая из двух линий OA и OD будет полудиаметром куба, как и все остальные. Для линии OK ясно по предложению 40 [=38] книги XI, что она равна EK, т. е. половине стороны куба; и поскольку KS равна KM, линия OS будет разделена точкой K в пропорции, имеющей середину и два края, и ее большей частью будет линия OK, равная EK. Итак, по предложению 5 [=4] книги XIII две линии OS и KS (но также OS и SP, ведь SP, до которой не дошло это доказательство, равна KS), взятые в степени, вместе в три раза больше линии OK, равной половине стороны куба. Итак, по предпоследнему предложению книги I линия OP в степени в три раза больше половины стороны куба. А в следствии из предложения 15 книги XIII утверждается, что полудиаметр сферы в степени будет в три раза больше половины стороны куба, вписанного, т. е. встроенного в эту самую сферу. Итак, OP равна полудиаметру сферы, описанной около предложенного куба; это же рассуждение приложимо ко всем линиям, соединяющим точку O с углами пятиугольников, построенных на сторонах куба и не являющихся углами поверхностей куба, каковы в построенном пятиугольнике углы N, P, R. А что касается тех линий, которые идут от точки O ко всем углам пятиугольников, общим у этих пятиугольников с плоскостями куба, каковы в настоящем пятиугольнике углы A и D, ясно, что они равны полудиаметру сферы, описанной около данного куба, поскольку они являются полудиаметрами куба по предложению 40 [=38] книги XI. Но полудиаметр куба служит также полудиаметром сферы, описанной около этого куба, как следует из рассуждений предложения 14 [=15] книги XIII. И вот, все линии, соединяющие точку O со всеми углами додекаэдра — так по-гречески называется тело, охваченное 12 равносторонними и равноугольными пятиугольниками — равны друг другу и равны полудиаметру сферы. И полукруг, проведенный на любом диаметре сферы или куба, совершив полный оборот, пройдет через все его углы: стало быть, по определению он является вписанным, т. е. встроенным в предложенную сферу.

Далее я утверждаю, что сторона этой фигуры является иррациональной линией, называемой вычетом, если диаметр описанной сферы является рациональным по длине или только в степени. Поскольку диаметр сферы в степени по предложению 14 [=15] книги XIII в три раза больше стороны куба, то сторона куба будет рациональной в степени, если диаметр сферы будет рациональным по длине или только в степени. И по предложению 11 [=8] книги XIII ясно, что линия RP делит линию AD, каковая является стороной куба, в пропорции, имеющей середину и два края, и что ее большая часть равна стороне пятиугольника. И поскольку ее бóльшая часть является вычетом по предложению 6 книги XIII, отсюда следует, что сторона фигуры, называемой додекаэдром, является вычетом. А это мы и хотели доказать.

Глава XXXI. **О правиле и способе отыскивать стороны данных тел**

Уметь отыскать стороны пяти вышеназванных тел, вписанных в одну и ту же сферу, заданную одним ее диаметром[47].

К примеру, пусть AB есть диаметр предложенной нам сферы, и нам нужно найти стороны 5 вышеназванных тел, каковые все вписаны в эту сферу и одним из своих углов касаются друг друга; и данная сфера их в точности объемлет. Это делается так: разделим этот диаметр в точке C, чтобы AC была в два раза больше CB, затем еще пополам в точке D, и построим на нем полукруг AFB, и к его окружности проведем две перпендикулярные линии CE и DF. Соединим E с A и B, и F с B. И в предложении 13 книги XIII показано, что AE будет стороной фигуры с 4 треугольными равносторонними основаниями; а в предложении 14 [=15], что EB будет стороной куба; а в предложении 15 [=14], что FB будет стороной фигуры с 8 треугольными равносторонними основаниями.



Далее, проведем из точки A линию AG, перпендикулярную AB и равную AB; соединим G с D, и пусть H будет точкой, в которой GD делит окружность полукруга. Опустим на AB перпендикуляр HK. И поскольку GA в два раза больше AD, по предложению 4 книги VI HK будет в два раза больше KD, ведь два треугольника GAD и HKD являются равноугольными по предложению 32 книги I, поскольку угол A большего [треугольника] равен углу K меньшего, ибо каждый из них является прямым, а угол D является общим.

Далее, по предложению 4 книги II HK в степени будет в четыре раза больше KD; и далее, по предпоследнему предложению книги I HD в степени будет в пять раз больше KD (и поскольку DB равна HD, ибо D есть центр круга, DB в степени будет в пять раз больше KD). И поскольку вся AB в два раза больше всей BD, и AC, вынутая из первой AB, в два раза больше CB, вынутой из первой BD, то по предложению 19 книги V BC, остаток первой будет вдвое больше CD —

[47] Предложение 18 книги XIII.

остатка второй; но вся BD в три раза больше DC. Далее, квадрат BD будет в девять раз больше квадрата CD, и поскольку он же в пять раз больше квадрата на KD, по второй части предложения 10 книги V квадрат на DC будет меньше квадрата на KD, и поэтому DC меньше KD. Отложим DM равным KD и проведем MN перпендикулярно к AB до пересечения с окружностью и соединим N с B. И поскольку DK и DM равны между собой, то по определению равноудаленных от центра линий две линии HK и NM равноудалены от центра, и они равны между собой по второй части предложения 13 [=14] книги III и по второй части предложения 3 той же книги. И вот MN равна MK, и HK равна им же. И поскольку AB в два раза больше BD, и KM в два раза больше DK, и квадрат на BD в пять раз больше квадрата на DK, то по предложению 15 книги V квадрат на AB точно так же будет в пять раз больше квадрата на KM, ведь квадрат удвоенного — к квадрату удвоенного, как квадрат единичного — к квадрату единичного. И в доказательстве предложения 16 книги XIII показано, что диаметр сферы в степени в пять раз больше стороны шестиугольника, вписанного в круг, по которому вычерчивается фигура с 20 основаниями. Далее, KM равна стороне шестиугольника, вписанного в круг, по которому вычерчивается фигура с 20 основаниями, и диаметр сферы AB в степени в пять раз больше стороны шестиугольника, вписанного в круг этой фигуры, каковая есть KM. Далее, в том же доказательстве показано, что диаметр сферы составлен из стороны шестиугольника и двух сторон десятиугольника, вписанного в круг фигуры с 20 основаниями. И, так как KM есть сторона шестиугольника, и AK равна MB, ведь обе они суть остатки при вычитании равных из равных, MB будет как сторона десятиугольника. И вот MN есть сторона шестиугольника, ибо она равна KM, а по предпоследнему предложению книги I и по предложению 10 книги XIII NB будет как сторона пятиугольника, вписанного в круг фигуры с 20 основаниями. И, так как по доказательству предложения 16 той же книги сторона пятиугольника, вписанного в круг фигуры с 20 основаниями, есть сторона той же фигуры с 20 основаниями, ясно, что линия NB — сторона этой фигуры.

Далее разделим EB — каковая является стороной куба, вписанного в предложенную сферу — в пропорции, имеющей середину и два края, в точке P, и пусть ее большей частью будет PB. Ясно, по предыдущему доказательству, что PB будет стороной фигуры с 12 основаниями.

И вот найдены стороны пяти вышеназванных тел, когда нам дан только диаметр сферы; эти стороны таковы, что AE есть [сторона] пирамиды с 4 основаниями, EB — сторона куба, FB — сторона октаэдра, NB — сторона икосаэдра и PB — сторона додекаэдра. И какая из этих сторон больше другой, выясняется так. Ясно, что AE больше FB, ведь дуга AE больше дуги FB, и еще FB больше EB, и EB больше NB. И далее я утверждаю, что NB больше PB, ведь AC вдвое больше CB, и по предложению 4 книги II квадрат AC будет вдвое больше квадрата CB; а по второй части следствия из предложения 8 книги VI и по следствию из предложения 17 этой же книги ясно, что квадрат AB будет в три раза больше квадрата BE. Но по предложению 21 [=19] книги VI квадрат AB к квадрату BE как квадрат BE к квадрату CB, поскольку по второй части следствия из предложения 8 книги VI имеется пропорция AB к BE как BE к BC. Итак, по предложению 11 книги V квадрат BE будет в три раза больше квадрата CB, и поскольку квадрат AC в четыре раза больше того же самого квадрата, как это было показано, то по первой части предложения 10 книги V квадрат AC будет больше квадрата BE. И вот линия AC будет больше линии BE, а AM — еще больше. И в предложении 9 книги XIII утверждается, что линия AM разделена в пропорции, имеющей середину и два края, и ее большей частью будет линия KM, равная MN; и BE разделена в той же самой пропорции, которая *habens medium et duo extrema*, и ее большей частью будет линия PB. И поскольку вся AM больше всей BE, то и MN, равная большей части AM, будет больше PB, большей части EB. И это утверждается в предложении 2 книги XIV[48], без помощи следующих за ним предложений, и усилено надежным доказательством. Далее, по предложению 19 книги I, тем более будет NB больше PB.

Итак, стороны пяти вышеназванных тел стоят почти в том же самом порядке, в котором они перечислены, с одним исключением. Оно состоит в том, что мы рассматривали не в том порядке куб и октаэдр, имеющий 8 оснований, но сторона октаэдра предшествует стороне куба, в то время как куб предшествует октаэдру в построении и составлении, как это происходит в книге XIII не без тайны[49]. В построении куб имеет превосходство над октаэдром, поскольку одно и то же разделение диаметра предложенной сферы касается и пирамиды с 4 треугольными основаниями, и куба. Далее, сторона пирамиды AE больше сторон всех остальных тел. За ней идет сторона октаэдра FB, которая больше сторон всех остальных тел, идущих за ним. На третьем месте по размеру идет EB, сторона куба; и на четвертом месте — NB, сторона тела с 20 основаниями, т. е. икосаэдра. И наименьшей из всех будет PB, сторона додекаэдра, тела с 12 пятиугольными основаниями.

[48] Непонятно, какое предложение в редакции Гейберга имеется в виду.

[49] В редакции Гейберга в книге XIII составление октаэдра (предложение 14) предшествует составлению куба (предложение 15).

Глава XXXII. **О пропорции данных правильных тел между собой и с зависимыми телами**

После того, как указаны достаточность пяти указанных правильных тел и невозможность их существования в количестве более пяти, поскольку зависимые от них тела можно перечислять до бесконечности, следует указать пропорции одного к другому и обратно, и какова их вместимость и наполняемость (capacita e continentia), и каковы их поверхности; и далее сказать о включении одного тела в другое и наоборот, и прежде всего — об их объеме (aria corporale[50]).

Пропорции одного тела к другому всегда будут иррациональными, имея в виду нашу описанную выше пропорцию, которая, как было сказано, участвует в их построении и составлении. Исключение составляют тетраэдр, куб и октаэдр, так как их точная пропорция с диаметром сферы, в которую они вписаны, может быть рациональной[51], но аналогичное соотношение икосаэдра и додекаэдра, если нам захочется их сравнить, не будет рациональным по указанной причине.

И хотя мне так не кажется, Светлейший герцог, все же следует сказать, что далее придется наращивать объем бесконечных иррациональностей, в каковых наш интеллект скорее запутывается, нежели находит удовлетворение, и в каковых завершается наше исследование, до сих пор всегда понятое. И, мне кажется, есть простое средство остановиться на том, что в нашем трактате сказано о составлении тел, с каковыми по их многочисленности сообщается вселенная. Их связующие размеры устанавливаются в таком месте, где проницательность разума устремлена не к пользе, но к большему удовлетворению. И почти то же самое я скажу обо всех зависимых от них, каковые вы там уже не обнаружите.

Истинно также, по предложению 10 книги XIV[52], что пропорция додекаэдра и икосаэдра, когда оба они встроены в одну и ту же сферу, будет как у всей поверхности ко всей поверхности, когда они соединены вместе. И в предложении 16 той же книги[53] сказано, что октаэдр делится на две пирамиды равной высоты, каковая равна полудиаметру сферы, в которой он построен, с квадратными основаниями. И поверхность этого квадрата составляет половину квадрата на диаметре сферы. Это замечание будет нам полезно своей мерой; ведь оно обращается во многие другие.

---

[50] Буквально — «телесном воздухе».

[51] Включая сюда рациональность в степени.

[52] В редакции Гейберга это утверждение, доказанное Аполлонием, в качестве отдельного предложения не выделено.

[53] В редакции Гейберга этого предложения нет.

Глава XXXIII. **О пропорции их поверхностей между собой**

Мы можем сказать, Светлейший герцог, что их поверхности пропорциональны между собой тем же образом, что и телесная масса, поскольку они иррациональны из-за ущерба пятиугольной фигуры, встроенной в додекаэдр. Но другие могут иногда быть рациональными, каковы тетраэдр, куб, октаэдр, ведь треугольники и квадраты состоят в пропорции с диаметром сферы, в которую эти тела вписаны, как это было видно выше. И в самом деле, предложение 8 [=6] книги XIV заключает: вся поверхность [тела] с 12 пятиугольными основаниями относится ко всей поверхности [тела] с 20 треугольными основаниями, каковые тела суть додекаэдр и икосаэдр, как сторона куба к стороне треугольника тела с 20 основаниями, когда все эти тела вписаны, т. е. встроены в одну и ту же сферу. И мне не хочется молча пройти мимо удивительного соответствия между ними и их основаниями, а именно того, что всякое основание додекаэдра и икосаэдра вписано в один и тот же круг, как показано в предложении 5 [=3] книги XIV. Этот факт достоин того, чтобы быть отмеченным; и это происходит, когда они построены в одной и той же сфере.

И вся поверхность тетраэдра состоит ко всей поверхности октаэдра в пропорции, отмеченной в предложении 14 книги XIV[54], так что основание тетраэдра составляет столько же и треть основания октаэдра, каковая пропорция будет сверхтретьей, когда больший содержит меньший один раз и еще треть, как 8 к 6 или 12 к 9. И пропорция всей поверхности октаэдра, взятой целиком, ко всей поверхности тетраэдра, взятой целиком, будет полуторной, что составит столько же и половину, как если бы октаэдр был 6, а тот 4, ведь больший содержит меньший и его половину, когда они находятся в одной и той же сфере. И вся [поверхность] тетраэдра, объединенная со всей [поверхностью] октаэдра, составит одну поверхность, называемую *медиалью*, как сказано в предложении 13 книги XIV[55].

И вся поверхность гексаэдра, т. е. куба вдвое превосходит квадрат диаметра описывающей его сферы; и перпендикуляры, опущенные из центра сферы к каждому основанию данного куба, всегда равны половине стороны этого куба, по последнему предложению книги XIV[56]. И если названный диаметр будет равен 4, то вся названная поверхность будет равна 32; и если названный перпендикуляр будет равен 1,

[54] В редакции Гейберга этого предложения нет.

[55] В редакции Гейберга этого предложения нет. Более того, само утверждение неверно: медиалью будет не образованная таким образом поверхность, но отрезок, который величину этой поверхности квадрирует. Возможно, Лука Пачоли здесь неправильно трактует свой источник.

[56] В редакции Гейберга этого предложения нет.

то сторона куба будет равна 2. Об этих пропорциях, каковые имеют между собой поверхности, достаточно разъяснено в нашем трактате, и к ним добавляются всевозможные зависимые от них, если аккуратно воспользоваться алгеброй.

Глава XXXIV. **О включении пяти правильных тел друг в друга, сколько их всего и почему**

Настало время поговорить о том, как одно из этих 5 сущностных, т. е. правильных, тел содержится в другом, и какие из них включаются друг в друга, а какие нет, и почему. Итак, сперва говорится о тетраэдре, что в него нельзя вписать никакого иного тела, кроме октаэдра, т. е. тела с 8 треугольными основаниями и с 6 телесными углами. Ведь в нем нет ни сторон, ни оснований, ни углов, к которым можно было бы приставить стороны, углы или плоскости куба так, чтобы они одинаково касались второго [тела], чего требует настоящее вписывание; и его материальная форма предстает зрению в таком виде, а по истинной науке это утверждается в предложении 1 книги XV[57]. И этого же нельзя сделать и с двумя остальными [телами], с икосаэдром и додекаэдром.

Если мы теперь захотим вписать, т. е. встроить названный октаэдр в названный тетраэдр с 4 основаниями, мы сделаем это следующим образом. Сначала мы построим названный тетраэдр, чему мы уже научились выше, а сделав это, мы разделим каждую его сторону пополам и соединим средние точки между собой прямыми линиями[58]. Когда это будет сделано, несомненно, получится так, что 6 телесных углов данного тела расположатся в точности на 6 сторонах данного тетраэдра, будучи одинаково к ним приставленными. Это извлекается из материального опыта и утверждается в предложении 2 книги XV.

Глава XXXV. **Как данный тетраэдр встраивается и размещается в кубе**

Названный тетраэдр размещается в кубе следующим образом: сначала строится куб по данному выше способу, а затем в каждой из его 6 квадратных плоскостей проводится диагональ, т. е. диаметр, и требуемое будет выполнено, как доказывается в предложении 1 книги XV, поскольку данный тетраэдр, как было сказано, имеет 6 сторон, соответствующих по числу 6 плоскостям куба, каковые будут 6 диа-

[57] Отсылка непонятна.

[58] Точки, лежащие на скрещивающихся «ребрах» тетраэдра, соединять не надо.

гоналями в вышеупомянутых плоскостях. И 4 угла пирамиды располагаются в 4 из 8 углов данного куба. Так что теперь владыка этих вещей, святой опыт, уясняет свой вклад в материи.

Глава XXXVI. **О включении октаэдра в куб**

Желая построить октаэдр с 8 основаниями в гексаэдре, первым делом следует иметь построенной в кубе пирамиду из равносторонних треугольников, стороны которой, как было сказано, будут 6 диаметрами его оснований. И когда мы разделим каждый из этих диаметров пополам и соединим эти средние точки прямыми линиями, в предложенном кубе обязательно будет построен октаэдр. И всякий его телесный угол будет лежать на основании данного куба по предложению 3 книги XV.

Глава XXXVII. **О построении гексаэдра в октаэдре**

Гексаэдр, т. е. куб, строится в октаэдре таким способом: сначала мы строим названный октаэдр, следуя приведенному выше описанию. И когда он построен, в каждом его треугольном основании, по предложению 5 книги IV, отыщем центр; и эти 8 центров соединим друг с другом 12 связующими прямыми линиями. И вот мы имеем требуемое заключение, и каждый из телесных углов куба будет лежать на основании данного октаэдра, как утверждается в предложении 4 книги XV.

Глава XXXVIII. **О вписании тетраэдра в октаэдр**

Если мы хотим вписать пирамиду из равносторонних треугольников в октаэдр, то сперва в этом последнем, который будет задан по сказанному выше, мы построим куб, а затем в этом кубе построим тетраэдр указанным выше способом. Проделав это с данным октаэдром, мы разместим в нем указанный тетраэдр, как утверждается в предложении 5 книги XV[59].

Глава XXXIX. **О построении додекаэдра в икосаэдре**

Икосаэдр, как было сказано, имеет 12 телесных углов, каждый из которых содержит 5 плоских углов 5 его треугольников. И вот, желая

[59] В редакции Гейберга такого предложения нет, оно было добавлено Кампано.

построить в нем додекаэдр, прежде всего надлежит, как мы этому уже научены, построить этот икосаэдр. И когда должное исполнено, в каждом его треугольном основании мы отыщем центр, по предложению 5 книги IV; а затем соединим их 30 прямыми линиями между собой так, чтобы получилось 12 пятиугольников, каждый напротив телесного угла данного икосаэдра. И каждая сторона этого пятиугольника будет противоположна, в скрещении, каждой стороне этого икосаэдра; и поскольку данный икосаэдр имеет 12 телесных углов, в додекаэдре будет 12 пятиугольников; и поскольку в нем имеется 20 треугольных оснований, в названном додекаэдре будет 20 телесных углов, обусловленных данными основаниями, опосредованных данными линиями. И поскольку в этом имеется 30 сторон, в додекаэдре тоже будет 30 сторон, противоположных этим в скрещении, как уже сказано, а вся его форма представлена в предложении 6 [=5] книги XV.

Глава XL. **О размещении икосаэдра в додекаэдре**

Когда потребуется построить икосаэдр в додекаэдре, первым делом мы построим [додекаэдр], следуя приведенному выше описанию, и в 12 его пятиугольниках найдем центры, следуя предложению 14 книги IV; и мы соединим эти центры между собой 30 линиями таким образом, чтобы в нем возникли 20 треугольников и 12 телесных углов, каждый из которых объемлет 5 плоских углов названных треугольников. И эти точки будут центрами своих 12 пятиугольников; и схожим образом эти 30 линий будут скрещены с 30 линиями додекаэдра, как было и в предыдущем построении, и это выявлено в предложении 7 книги XV[60].

Глава XLI. **О расположении куба в додекаэдре**

А еще в данном додекаэдре легко строится куб, поскольку он сам построен на 12 сторонах куба, как показано в предложении 17 книги XIII. Поэтому, когда во всех 12 пятиугольниках проводится 12 хорд, следуя указанному требованию, обязательно получаются 6 четырехугольных равносторонних плоскостей, так что каждая из них противоположна двум телесным углам данного додекаэдра, и в 8 вершинах додекаэдра расположены 8 вершин вписанного куба, так что к каждому основанию куба присоединена форма почти телесной призмы (quasi el corpo seratile)[61]. Все это проясняется в предложении 8 книги XV.

[60] В редакции Гейберга этого и следующих за ним предложений нет.

[61] По форме тело похоже на четырехскатную крышу, у которой два противоположных ската встречаются по верхнему ребру, а два других ската не встречаются друг с другом.

Глава XLII. **О том, как построить октаэдр в додекаэдре**

Если в додекаэдре сперва разместить куб, как об этом было рассказано ранее, затем в нем легко построить октаэдр. Разделим 6 сторон додекаэдра, противоположных 6 плоскостям куба, на равные [части]; эти стороны образуют почти призмы (quasi seratile), и их будет ровно 6. Все 6 средних точек мы соединим 12 прямыми линиями, чтобы получилось 6 телесных углов, каждый из которых содержит 4 плоских угла октаэдра. Каждый угол касается одной из названных сторон додекаэдра, а тем самым получено требуемое, и это содержится в предложении 9 книги XV.

Глава XLIII. **О включении тетраэдра в данный додекаэдр**

А еще в том же самом додекаэдре размещается тетраэдр; причем сначала в нем строится куб, как это было сказано, а затем в данном кубе размещается тетраэдр, как было показано. И когда это сделано, ясно, что наше предложение выполнено. В самом деле, телесные углы куба находятся в телесных углах додекаэдра, и телесные углы тетраэдра находятся в телесных углах куба; но тем самым этот тетраэдр обязательно включен в предложенный додекаэдр, и наш опыт показывает это в составленных нами материальных [телах], врученных Вашей Светлости, а научное доказательство этого приведено в предложении 10 книги XV.

Глава XLIV. **О построении куба в икосаэдре**

Чтобы построить куб в икосаэдре, в нем сперва строится додекаэдр, как уже было сказано. Затем в этом додекаэдре указанным образом строится куб; и когда это сделано, будет воспринято искомое, согласно уже сказанному: ведь все телесные углы додекаэдра находятся в центрах оснований икосаэдра, и телесные углы куба находятся в указанных телесных углах додекаэдра. Следовательно, искомое найдено, что проясняется в предложении 11 книги XV.

Глава XLV. **О том, как построить тетраэдр в икосаэдре**

Несомненно, если в данном икосаэдре построить куб, как мы научились делать выше, и затем в этом кубе строится тетраэдр, то он по необходимости будет вписан в данный икосаэдр. Ведь телесные углы пирамиды с 4 основаниями касаются телесных углов куба, и телесные углы куба касаются телесных углов икосаэдра, следовательно, заключая от первого к последнему, телесные углы тетраэдра равно касаются телесных углов икосаэдра. Это заключение содержится в предложении 12 книги XV. И это все, что можно сказать о видах предложенных включений.

Глава XLVI. **Почему указанных включений не может быть больше**

Итак, Светлейший герцог, из обсужденного устанавливается, что каждое из имеющихся 5 правильных тел, как это предположено, обязательно может быть построено в каждом, откуда следует, что каждое может включать в себя 4 прочих, и, последовательно перебирая их все, можно получить 20 вписываний, т. е. 5 раз по 4. Но оказывается, что не всякое [тело] приемлет в себя всякое, а потому имеется только 12 вписываний. А именно: одно из них — октаэдр в тетраэдре, и еще два — куб в тетраэдре и в октаэдре, и еще два — октаэдр в кубе и в тетраэдре. И три — в икосаэдре, а именно — додекаэдр, куб и тетраэдр; и четыре — в додекаэдре, а именно — икосаэдр, куб, октаэдр и тетраэдр. И числом их получается всего 12. Ведь в пирамиде с 4 основаниями нет ни сторон, ни углов, ни плоскостей, к которым было бы возможно приставить углы трех прочих правильных тел, помимо октаэдра. И куб может включить в себя только пирамиду и октаэдр. И октаэдр — только куб и пирамиду, и ни в одном, ни в другом невозможно разместить два оставшихся, т. е. икосаэдр и додекаэдр. Икосаэдр приемлет в себя три [тела], из коих исключен только октаэдр, чем подается славный знак, от которого все демоны трепещут, как от Святого Креста. [Тело], в котором имеются 3 линии, которые пересекаются отвесно, будучи протянутыми из угла в диаметрально противоположный угол, не помещается в нем, но они обязательно протягиваются внутри названного октаэдра. И только додекаэдр, обладая среди прочих [тел] единственной дарованной прерогативой, не исключает ни одного из них, предоставляя им всем пристанище. Еще и поэтому древний Платон, приводя его вместе с другими, приписал его вселенной.

Глава XLVII. **Как в каждом из указанных правильных тел строится сфера**

Далее, как увидит Светлейший герцог, для каждого из названных пяти правильных тел мы имеем доказательство того, что оно вписывается в предложенную сферу и описывается около нее. Сейчас нам осталось только показать, как названная сфера может быть вписана в каждое из них. То, что здесь требуется сделать, мы утверждаем с очевидной ясностью: и обратно в каждое из этих [тел] может быть вписана сфера. Это показывается так. От центра сферы, описанной вокруг каждого из этих тел, мы опустим перпендикуляры на все их основания, и они по необходимости упадут в центры кругов, описанных около этих оснований; а поскольку все круги, описанные около этих оснований, будут равными, тем самым будут равны и перпендикуляры. Итак, следуя величине одного из них, мы проведем круг около центра объемлющей сферы, а затем повернем его полукруг так, чтобы он совершил оборот и вернулся в исходное место. По необходимости он пройдет через все концы всех перпендикуляров, что вытекает из следствия к предложению 15 книги III[62], так что сфера, описанная движением этого полукруга, заденет, т. е. в точности коснется всех оснований тела, у которого собраны перпендикуляры; однако сфера заденет основания этого тела не более, чем полукруг, когда он касался их в своем движении. И вот установлено, что мы имеем сферу, вписанную в предложенное тело, что и требовалось получить.

Глава XLVIII. **О форме и расположении плоского тетраэдра, сплошного или полого; и об усечении плоского сплошного или полого; и о поднятии сплошного или полого**

Плоский тетраэдр, сплошной или полый {таблицы I, II}, образован 6 равными линиями, охватывающими 12 поверхностных углов и 4 телесных; и между ним находятся 4 треугольных основания, равносторонних и равноугольных.

О срезанном, т. е. усеченном. Тетраэдр срезанный, т. е. усеченный, плоский сплошной или полый {таблицы III, IV}, содержит 18 линий, образующих 36 поверхностных и 12 телесных углов. Его охватывают 8 оснований, из которых 4 — это шестиугольники с 6 равными сторонами, а другие 4 — треугольники, сходным образом равносторонние и равноугольные. Из 18 указанных линий 12 будут общими у треугольных и шестиугольных оснований, и они не в меньшей мере принадлежат этим шестиугольникам, ведь эти 4 шестиугольника по необходимости соединяются друг с другом своими сторонами, образуя 4 треугольника, и опыт уясняет это в своей собственной материальной форме, а наше зрение — в том, что оно видит. И это тело получается из предыдущего, когда его стороны одинаково обрезаны на треть.

О надстроенном теле. Тетраэдр надстроенный {таблицы V, VI} также имеет 18 линий, из которых 6 являются общими. Он имеет 36 плоских и 8 телесных углов, из которых 4 являются конусами плоских пирамид, а другие 4 будут общими для 5 пирамид, из которых внутренняя невидима глазу и познается только разумом, а остальные 4 являются внешними. Из этих 5 пирамид составлено названное тело,

[62] Отсылка не слишком понятна.

и они образуют в нем равносторонние и равноугольные треугольники, как нам показывает его собственная форма. Поверхности, которые его одевают, не являются основаниями в собственном смысле, и всего их 12 по числу, и все они треугольные. И из него никоим образом не может быть получено надстроенное усеченное [тело], по причине недостатка шестиугольников, не образующих телесных углов[63].

Глава XLIX. **О плоском гексаэдре, сплошном или полом; и об усеченном, сплошном или полом; и о надстроенном плоском и надстроенном усеченном**

Гексаэдр, т. е. куб, плоский сплошной или полый {таблицы VII, VIII}, имеет 12 линий, т. е. сторон или ребер, 24 плоских угла и 8 телесных, и 6 оснований, т. е. плоскостей, которые его содержат, все — равносторонние и равноугольные квадраты, и он подобен по форме дьявольскому инструменту, называемому игральной костью.

О срезанном, т. е. усеченном. Гексаэдр срезанный, т. е. усеченный плоский {таблицы IX, X}[64], равным образом сплошной или полый, имеет 24 линии, которые между собой образуют 48 плоских углов, из которых 24 будут прямыми, а остальные — острыми. И он имеет 12 телесных углов и охвачен 14 плоскостями, т. е. основаниями, из которых 6 будут квадратами и 8 — треугольниками. И все названные линии являются общими для квадратов и треугольников, потому что эти 6 квадратов соединяются между собой угол в угол, по необходимости порождая 8 треугольников, как это делали шестиугольники в усеченном тетраэдре. И он получается из куба, когда его стороны одинаково обрезаются до середины, как это представляет взгляду его собственная материальная форма.

О надстроенном. Гексаэдр надстроенный, сплошной или полый {таблицы XI, XII}, в своем устройстве по необходимости содержит 36 приложенных к нему линий, порождающих 72 поверхностных угла и 6 телесных пирамидальных углов, каждый из которых охватывает 4 поверхностных. Он одет 24 треугольными поверхностями, которые в собственном смысле не называются основаниями. Из этих линий 12 будут общими для всех поверхностных треугольников, которые его охватывают и окружают. Названное тело составлено из 6 внешних четы-

[63] Шестиугольник не может служить основанием пирамиды, боковые стороны которой являются равносторонними треугольниками.

[64] В современной терминологии это тело принято называть *кубоктаэдром*, ведь его точно так же можно получить и усечением всех телесных углов октаэдра на половину каждой стороны. А *усеченным кубом* принято называть тело, которое получается усечением всех телесных углов куба на треть каждой стороны; такое тело ограничено 6 восьмиугольниками и 8 треугольниками.

рехгранных пирамид, которые, если смотреть на них, и представляют собой все тело; и еще из внутреннего куба, на который опираются все эти пирамиды, и его представляет только разум, поскольку этот куб полностью скрыт от глаз из-за перекрытия названными пирамидами. И 6 квадратных плоскостей этого куба служат основаниями названных 6 пирамид, так что все их возвышение представлено глазу и окружает названный скрытый куб.

Об усеченном надстроенном теле. Гексаэдр усеченный, надстроенный, сплошной или полый {таблицы XIII, XIV}, имеет 72 линии, т. е. стороны или ребра. Они образуют 144 поверхностных угла и 14 телесных пирамидальных. Из них 6 пирамид будут четырехгранными и 8 — трехгранными. Из указанных линий 24 будут общими для треугольных и четырехугольных пирамид. Это тело имеет 48 граней, т. е. плоскостей, которые его охватывают, и все они треугольные: и оно составлено из внутреннего усеченного гексаэдра, воспринимаемого только разумом, и 14 пирамид. Брошенное на плоскую поверхность, оно всегда опирается на 3 пирамидальных конуса, т. е. опоры, как показывает его форма.

Глава L. **О плоском октаэдре, сплошном или полом; и об усеченном, сплошном или полом; и о надстроенном, сплошном или полом**

Октаэдр плоский, сплошной или полый {таблицы XV, XVI}, наследует 12 линий и 24 плоских угла, а телесных углов в нем 6; и он охвачен 8 треугольными основаниями, равносторонними и соответственно равноугольными; и такой нам предстает его собственная материальная форма.

Об усеченном плоском теле. Октаэдр усеченный, т. е. срезанный, плоский сплошной или полый {таблицы XVII, XVIII}, имеет 36 линий, образующих 72 плоских угла, из которых 48 относятся к шестиугольникам и 24 — к квадратам. Он содержит 24 телесных угла и имеет 14 оснований, из которых 8 являются шестиугольниками с 6 сторонами и 6 — четырехугольниками, т. е. квадратами. Из названных линий 24 будут общими для квадратов и шестиугольников. И все квадраты возникают из шестиугольников, когда 8 одинаковых шестиугольников составляются вместе, и взгляд уясняет все это в материальной форме, а разумом отмечается истина. И из него уже невозможно образовать такое надстроенное тело, которое соблюдало бы однородность, все из-за того же недостатка шестиугольников, каковые, как это уже говорилось об усеченном тетраэдре, не могут создать телесный угол.

О надстроенном теле, сплошном или полом. Октаэдр надстроенный, сплошной или полый, {таблицы XIX, XX} имеет 36 линий равной длины, 36 плоских углов и 8 телесных пирамидальных. Его охватывают 24 плоскости, все — равносторонние и равноугольные треугольники, в точности его окружившие. Из этих линий 12 будут общими для всех треугольников, входящих в пирамиды. Это тело составлено из 8 треугольных пирамид, равносторонних и равноугольных, с одной и той же высотой, которые все обращены наружу, и из внутреннего октаэдра, постижимого только воображением разума, и основания этого октаэдра служат основаниями названных 8 пирамид, как нам показывает его материальная форма.

Глава LI. **О плоском икосаэдре, сплошном или полом; и об усеченном, сплошном или полом; и о надстроенном, сплошном или полом**

Икосаэдр плоский, сплошной или полый {таблицы XXI, XXII}, содержит 36 линий, т. е. сторон, каковые все равны между собой, и они образуют 60 плоских и 12 телесных углов; и в нем собрано 60 оснований, все — треугольные, равносторонние и равноугольные. И каждый из телесных углов построен, т. е. составлен из 5 плоских углов этих треугольных оснований, что показывает его материальная фигура.

Об усеченном плоском теле. Икосаэдр усеченный, плоский или телесный {таблицы XXIII, XXIV}, имеет 90 сторон, т. е. линий и 180 плоских углов, из которых 120 относятся к треугольникам, участвовавшим в его построении[65], и 60 — к возникающим в нем равносторонним пятиугольникам. Эти линии образуют вокруг названного тела 32 основания, из которых 20 будут шестиугольниками с 6 равными сторонами, и 12 — пятиугольниками с 5 равными сторонами. При этом каждая разновидность будет равносторонней и равноугольной, так что все шестиугольники имеют между собой равные углы и все пятиугольники имеют между собой равные углы. И все стороны, как в пятиугольниках, так и в шестиугольниках, между собой равны. Так что пятиугольники и шестиугольники различаются только углами. И это тело возникает из предыдущего правильного, когда каждая его сторона одинаково обрезается на третью часть. Таким усечением создаются 20 шестиугольников и 12 пятиугольников, как было сказано, и 30 телесных, т. е. сплошных углов. Из названных линий 60 будут общими для шестиугольников и пятиугольников, поскольку 20 шестиугольников, однообразно соединяясь между собой, порождают 12 пятиугольников. И из него уже не может быть образовано надстроенное

[65] Двадцать исходных треугольников икосаэдра при усечении его телесных углов превратились в 20 шестиугольников. В отличие от усечения куба, когда каждый телесный угол отрезался наполовину стороны, при усечении октаэдра Лука Пачоли отрезает телесный угол на треть стороны.

тело из-за недостатка шестиугольников, как это уже говорилось об усеченном тетраэдре и усеченном октаэдре.

О надстроенном теле. Икосаэдр надстроенный, сплошной или полый {таблицы XXV, XXVI}, содержит в себе 90 линий, 180 плоских и 20 телесных пирамидальных углов; и имеет 60 оснований, т. е. плоскостей, которые его окружают, будучи все равносторонними и равноугольными треугольниками. Из этих 90 линий 30 будут общими для каждой поверхности его 20 пирамид. Названное тело составлено из 20 треугольных равносторонних и равноугольных пирамид одинаковой высоты и из целого внутреннего икосаэдра, воспринимаемого только воображением разума; и его основания также служат основаниями названных 20 пирамид, и все это показывает его собственная материальная форма.

Глава LII. **О плоском додекаэдре, сплошном или полом; и об усеченном, сплошном или полом; и о надстроенном, сплошном или полом; и о надстроенном усеченном, сплошном или полом; и о его происхождении, т. е. зависимости**

Додекаэдр плоский, сплошной или полый {таблицы XXVII, XXVIII}, имеет 30 равных линий, т. е. сторон, которые образуют в нем 60 плоских углов. И он имеет 20 телесных углов и 12 охватывающих его оснований, т. е. поверхностей, каковые все являются пятиугольниками с равными сторонами и углами, как показывает его форма.

Об усеченном, т. е. срезанном. Додекаэдр срезанный, т. е. усеченный, плоский, сплошной или полый {таблицы XXIX, XXX}[66], имеет 60 линий одинаковой длины, и 120 плоских и 30 телесных углов. Из 120 плоских углов 60 относятся к треугольникам и 60 к пятиугольникам, и эти треугольники по необходимости порождают пятиугольники, когда они стягиваются друг к другу углами: как это говорилось раньше о порождении усеченных тетраэдра и октаэдра, образованных шестиугольниками, четырехугольниками и треугольниками, и об усеченном икосаэдре из шестиугольников и пятиугольников; и это нам показывает его материальная форма. И каждый из названных телесных углов охватывает 4 плоских угла, из которых два относятся к треугольникам и два — к пятиугольникам, чередующимся в одной и

[66] В современной терминологии это тело называется *икосидодекаэдром*, ведь его точно так же можно получить и усечением всех телесных углов икосаэдра на половину каждой стороны. А *усеченным додекаэдром* принято называть тело, которое получается усечением всех телесных углов додекаэдра на треть каждой стороны; такое тело содержит 12 десятиугольников и 20 треугольников.

той же точке. И все его линии или стороны являются общими для треугольников и пятиугольников, ведь те и другие обязательно прикладываются друг к другу, и одно служит причиной другого, треугольники для пятиугольников и пятиугольники для треугольников. И когда соединяются углами 12 равносторонних пятиугольников, в этом теле возникают 20 треугольников; но можно сказать и так, что когда соединяются углами 20 равносторонних треугольников, они схожим образом порождают 12 равносторонних треугольников. И отсюда следует, что все названные линии являются общими между собой, как уже сказано. И охватывающих поверхностей имеется 32, из которых 12 суть равносторонние и равноугольные пятиугольники и 20 — равносторонние и равноугольные треугольники; и как было сказано, все они взаимно обусловливают друг друга. Это проявляется в его материальной форме; и он получается из предыдущего [тела] одинаковым отсечением каждой его стороны до середины.

О надстроенном теле. Додекаэдр надстроенный, сплошной или полый {таблицы XXXI, XXXII}, имеет 90 линий и 180 плоских углов, и 12 телесных надстроенных пятиугольных пирамид; и еще он содержит 20 оснований телесных шестиугольников[67]. Он имеет 60 плоскостей, и все они — равносторонние и равноугольные треугольники. Из названных 90 линий 30 будут общими для 12 оснований пятиугольных пирамид, каковые основания одинаковым образом сходятся, будучи пятиугольными. Они же служат основаниями встроенного внутрь этой композиции правильного додекаэдра, каковой может быть воспринят только воображением разума. Эти 30 общих линий образуют 20 смятых (depressi) телесных углов, которые, как уже сказано, будут шестиугольными, поскольку при их построении сходятся 6 линий[68]. Это тело образуется из рассмотренного выше внутреннего правильного додекаэдра и 12 пятиугольных пирамид, равносторонних и равноугольных, с одинаковой высотой; и их основания будут теми же самыми, что у внутреннего [додекаэдра].

Об отрезанном надстроенном теле. Додекаэдр усеченный, надстроенный, сплошной или полый {таблицы XXXIII, XXXIV}, имеет 180 сторон, т. е. линий, из которых 60 надстроены при возникновении пятиугольных пирамид, и 60 — при установлении треугольных

[67] Эти «телесные шестиугольники» не являются плоскими, хотя они и составлены из 6 равносторонних треугольников, принадлежащих трем смежным пятиугольным пирамидам. Сам Лука Пачоли ниже называет эти шестиугольники «смятыми».

[68] Здесь Лука Пачоли не точен — в образовании «смятых» телесных углов участвуют не только «ребра» исходного додекаэдра, но также и боковые «ребра» надстроенных на нем пятигранных пирамид. В вершине такого угла сходятся, перемежаясь, по три «ребра» каждой из двух разновидностей.

пирамид; а остальные 60 служат сторонами оснований каждой из указанных пирамид, каковые суть пятиугольные и треугольные. Это тело, будучи построенным, составлено из внутреннего плоского усеченного додекаэдра, который разум постигает только воображением, и 32 пирамид, из которых 12 будут пятиугольными, одинаковой между собой высоты, и 20 — треугольными, тоже одинаковой между собой высоты. Основаниями этих пирамид служат плоскости названного усеченного додекаэдра, соответственно треугольное — в треугольной пирамиде, и пятиугольное — в пятиугольной пирамиде.

Положенное на плоскость, оно всегда стоит на 6 опорах, т. е. пирамидальных конусах; причем один их них будет конусом пятиугольной пирамиды, а остальные 5 — конусами треугольных пирамид. Тот факт, что эта опора является ровной, при взвешенном рассмотрении представляется неправдоподобным; но это так, Светлейший герцог, и величайшая абстракция глубокой науки постигает его, не давая мне лгать. Его измерение возводится тончайшей практикой алгебры и алмукабалы до редкой отметки, а в нашем сочинении лучше показать легкий путь, которым его можно постичь. И схожим образом выполняются все трудные измерения в усеченном икосаэдре, где перемежаются шестиугольники и пятиугольники.

Глава LIII. **О теле с 26 основаниями и его происхождении, плоском — сплошном или полом; и о надстроенном — сплошном или полом**

Еще одно тело, Светлейший герцог, заметно отличается от уже названных, — это так называемое тело с 26 основаниями {таблицы XXXV, XXXVI}[69], которое изящнейшим образом отклоняется от них в своем начале и порождении. Из этих оснований 18 являются квадратами, равносторонними и равноугольными, и 8 — треугольниками, также равносторонними и равноугольными. Оно имеет 48 сторон или линий и 96 плоских углов, из которых 72 являются прямыми, относящимися к 18 квадратным основаниям, и 24 — острыми, относящимися к 8 равносторонним треугольникам. Его 96 углов соединяются в композиции, образуя 24 телесных угла, каждый из которых состоит из одного плоского угла в треугольнике и трех прямых углов в квадратах. Из его 48 линий 24 будут общими для треугольников и квадратов, и когда [квадраты] соединяются вместе должным образом, из них по необходимости получаются 8 треугольников, как в других они получались усечением, о чем сказано выше. Это тело возникает, когда однородный гексаэдр обрезается во всех своих частях, как его материальная форма легко

[69]Это тело сегодня принято называть *усеченным ромбикубоктаэдром*.

показывает глазу[70]. И его знание является полезнейшим во многих рассмотрениях и приложениях, особенно в архитектуре. Вот что следует заметить об этом плоском теле, сплошном или полом.

О надстроенном теле, сплошном или полом. Тело с 26 основаниями, сплошное или полое, надстроенное {таблицы XXXVII, XXXVIII}, получает для своего построения 144 линии, каковые составляются в нем, следуя возможным требованиям, образуя 288 плоских углов и 26 телесных надстроенных пирамидальных, из которых 18 содержат по 4 плоских острых угла, и 8 — по 3 острых. Это тело составляется из 26 пирамид, среди которых 18 четырехугольных и 8 треугольных, и все они расположены снаружи и доступны взгляду, а также из предыдущего сплошного плоского тела с 26 основаниями, находящегося внутри и познаваемого только воображением. Его 26 оснований соответственно служат основаниями вышеупомянутых 26 пирамид, 18 квадратных — в 18 четырехугольных пирамидах, и 8 треугольных — в 8 треугольных пирамидах. И как бы мы ни положили его на плоскую поверхность, оно всегда будет опираться на три точки, т. е. пирамидальных конуса. Вот чем опыт, касающийся его материала, удовлетворяет зрение.

Глава LIV. **О теле с 72 основаниями, плоском — сплошном или полом**

Среди них допустимо, Светлейший герцог, поместить тело с 72 основаниями, которое наш мегарский философ подробно описывает в предложении 14 [=17] своей книги XII {таблицы XXXIX, XL}. Это тело хотя и имеет плоские боковые и угловые основания неправильной формы, не является зависимым и производным от какого-то правильного тела, однако строится и создается, как указывает в данном месте наш философ, на основе двенадцатиугольной фигуры с 12 равными сторонами. Среди его оснований 48 четырехугольников, неравносторонних и неравноугольных, и только две их противоположные стороны, вытянутые к одному или другому полюсу, равны друг другу; остальные 24 основания — это одинаковые неравносторонние треугольники. Из них 12 расположены вокруг одного из конусов, и 12 — вокруг другого, и каждый треугольник имеет две равные стороны, а именно те, которые протянуты от нижнего полюса к верхнему.

Из этой фигуры всегда можно образовать надстроенную, как это делалось в других случаях, но из-за неоднородности ее оснований такая наука будет сложна, хотя бы глазам и предстало опосредованное изящество. Она породит 72 пирамиды согласно числу 72 ее оснований,

[70] Оно же может быть получено и усечением октаэдра.

каковые пирамиды будут соответствовать внутренним воображаемым [основаниям]. Материальный вывод формы этого надстроенного тела оставляем читателю, интеллект которого мне не доверяет.

И это [тело] с 72 основаниями часто используется архитекторами при строительстве зданий, поскольку эта форма весьма удобна там, где нужно сделать кафедры или другие своды, иначе сказать — купола. И пусть не всегда в точности, но все же эти здания строились на основе простых принципов, и их членили и поворачивали всевозможными способами сообразно тому месту, где они должны были стоять. В их расположении и постройке проявляется наилучшее соответствие различных частей, и таков бесценный античный храм Пантеон, а ныне — Ротонда, служащая украшением всего христианского мира. Он выстроен с таким тщанием в соблюдении пропорций, что свет из единственного верхнего отверстия превосходно и ярко освещает все доступное пространство (el rende). Я пропущу многие другие знаменитые и славные города, такие как Флоренция, Венеция, Падуя, Неаполь и Болонья, в которых находятся многочисленные строения, церковные и светские, малые и большие, и не буду говорить о том, как они построены. И в Вашем Милане в достойной церкви Сан-Скеттро есть прекрасная часовня, часть которой была разрушена и восстановлена с сохранением той же выпуклости стены, и все ее грани соединены розеткой, украшающей доступное пространство. И в Вашем верном и священнейшем храме делла Грацие у кафедры (tribuni) при главном алтаре и по бокам ни одна часть не схожа с другими, и они весьма привлекательны соединением своих граней.

И хотя многие создают и используют формы по своему усмотрению, не имея представления ни о Витрувии, ни о другом архитекторе, они занимаются искусством, не зная его: так Аристотель сказал о грубых крестьянах, что они *solegizant et nesciunt se solegizare*, ибо они *utuntur arte et nesciunt se uti*[71]. Ведь и портной, и сапожник пользуются геометрией, не зная, что она такое. Также и каменщики, плотники, кузнецы и другие ремесленники используют меру и пропорцию, не зная ее, ведь часто говорится, что все состоит из числа, веса и меры.

Но что мы скажем о современных зданиях, в своем роде упорядоченных и построенных по разным и различным моделям, если они выглядят привлекательными, пока невелики[72], но потом, в сооружении, они не выдерживают веса и не простоят тысячелетий, скорее рухнут на третьем [столетии]? Из-за плохого качества затраты на их ремонт превышают затраты на строительство, так что обходятся они доро-

[71] «Говорят неправильно и не знают, что говорят неправильно; пользуются искусством и не знают, что пользуются» (лат.).

[72] Пока представлены заказчику в масштабных моделях.

го. Они называют себя архитекторами, но я никогда не видел у них в руках выдающейся книги нашего достойнейшего архитектора и великого математика Витрувия, который составил трактат *Об архитектуре* с наилучшими описаниями каждого сооружения. И те, кому я дивлюсь, пишут на воде и строят на песке, наскоро растратив свое искусство: ведь они являются архитекторами лишь по имени, ибо не ведают разницы между точкой и линией и не знают различия между углами, без чего невозможно хорошо строить. Подтверждением этому, как говорит знаменитый Витрувий, служат большая радость и удовлетворение, которые испытал Пифагор, когда на основе известной науки открыл истинную пропорцию двух прямых линий, охватывающих прямой угол, за что и принес великую жертву богам, заклав сто быков. И этот угол примечателен тем, что он никогда не может измениться[73], и превосходные геометры называют его углом справедливости, потому что, не зная его, нельзя отличить хорошее от плохого ни в одном нашем деле, раз без него нельзя ничего точно измерить. И вот современные башмачники в своих строениях нисколько не следуют прямой и обязательной античной норме, не полагают никакого предела своей глупости, порицая — будто это никого не касается — тех, кто, с их точки зрения, напрасно возвращается к истинному и древнему способу. Однако есть и такие, кто восхищается нашими математическими дисциплинами, внедряя истинное руководство всеми постройками в согласии с сочинением вышеупомянутого Витрувия. Отклонение от него заметно, если посмотреть, каковы наши строения, как церковные, так и светские: какое искривлено, а какое перекошено. И все же девиз Вашей Светлости и его действия замечательным образом сходятся на том, что всякая кривизна будет выпрямлена.

Продолжая уже начатое, скажу, что Ваш Милан не менее привлекателен, нежели Флоренция, однако неприглядность и неумелость портят всякое впечатление, вновь обретенное его правителями. И в самом деле, лучше спать, нежели видеть разглядываемое тысячей глаз, как это легко показал ваш близкий родственник, блистательный герцог Урбинский в восхитительной постройке своего достойного вышеупомянутого дворца. И это происходит при поддержке тех, кто обратил к худшему ими же сказанное и продокументированное.

Однако о названном теле сказано достаточно.

[73]В том смысле, что всякий острый угол может стать больше или меньше, оставаясь при этом острым, и всякий тупой — тоже, но прямой угол внутри своего вида единственен и неизменен, и он не может измениться без того, чтобы перестать быть прямым.

Глава LV. **О том, как можно строить другие тела, и о бесконечном числе их форм**

Мне не кажется нужным, Светлейший герцог, распространяться более о названных телах, хотя этот процесс уходит в бесконечность благодаря непрерывному и последовательному, как эстафета из рук в руки, отрезанию их телесных углов, в силу чего множатся их различные формы. И это само по себе — поскольку путь для названных тел открыт — облегчает продвижение, ведь сказано «Quod facile est inventis addere», что означает «Нетрудно добавлять к открытым вещам»; и потому, прибавляя и присоединяя больше или меньше к указанным телам, легко прийти к любому предложенному. Все это мы рассмотрели с целью показать, как [свойства] этих пяти правильных тел всегда переходят на зависимые тела в силу их сходства с пятью простыми, из коих составляются любые тела. По этой причине, как сказано выше, Платон был вынужден приписать пять превосходных правильных форм пяти простым телам, т. е. Земле, Воздуху, Воде, Огню и Небу, как это повсеместно следует из его *Тимея*, где идет речь о природе Вселенной.

Элементу земли он приписал кубическую форму, т. е. форму гексаэдра, считая, что при движении никакая другая форма не нуждается в большем усилии. А среди всех элементов какой, кроме Земли, будет более неизменным, неподвижным и прочным? Фигуру тетраэдра он придал элементу огня, потому что в полете он образует пирамидальную форму, которая выглядит подобной нашему огню — ведь мы видим его ровным у основания, широким и однородным, так что его пламя завершается остроконечно, как конус любой пирамиды. Форму октаэдра он приписал воздуху, ведь как воздух при малом движении следует за огнем, так и пирамидальная форма по склонности к движению следует за пирамидой. Фигуру с 20 основаниями, т. е. икосаэдр, он предназначил воде, ведь поскольку она ограничена большим числом оснований, чем какая-либо иная, кажется, будто она быстрее собирается в сферу, следуя движению тела, проливающегося скорее вниз, нежели вверх. А форму из 12 пятиугольников он приписал небу, вместилищу всех вещей. Это додекаэдр, подобный вместилищу и пристанищу всех остальных четырех правильных тел, что очевидно при вписывании их одно в другое. И еще, как говорит Алкиной[74] о *Тимее* Платона, подобно тому, как на небе имеется 12 знаков зодиака, каждый из которых делится на 30 равных частей, так что весь годовой оборот равен 360°, так и додекаэдр имеет 12 пятиугольных оснований, каждое из которых расчленяется на 5 треугольников, сходящихся к точке посредине, и всякий из этих треугольников — на 6 разносторон-

[74] Алкиной — греческий философ II в., автор «Учебника платоновской философии».

них, так что в каждом из оснований имеется по 30 треугольников, а всего их 360, как и в зодиаке.

И все эти формы весьма восхвалял знаменитый философ Халкидий, комментатор *Тимея*, а также Макробий, Апулей[75] и многие другие, ведь они и в самом деле достойны всяческой похвалы по причинам, неотъемлемым от их конструкции и указывающим на достаточность как этих пяти форм, так и пяти простых тел, и на невозможность существования других, кроме этих пяти; и как число названных простых [тел] не может увеличиться в природе, так и к пяти указанным правильным [формам] невозможно добавить иные с равными основаниями, сторонами и углами и вписанные в сферу так, чтобы если ее касался один угол, то касались бы и все остальные. И если бы в природе было бы возможным добавить шестое простое тело, то вышло бы, что Верховный Творец неосторожно захотел, чтобы число его творений было меньше должного, и неблагоразумно будет осуждать его за то, что он с самого начала не создал всего необходимого. Именно поэтому, а не по иным мотивам, Платон, рассматривая [эти формы], как сказано, приписал их каждому из простых [тел], обосновав это указанным образом как прекрасный геометр и глубочайший математик. Видя, что какую-либо иную форму помимо пяти указанных, вписанную в сферу и имеющую равные стороны, основания и углы, нельзя ни представить, ни образовать, как показано в предпоследнем предложении книги XIII[76], он, как нам кажется, вполне удачно и небезосновательно доказал, что они соответствуют пяти простым [телам], и от них зависит всякая иная форма. И хотя только эти пять форм называют правильными, из них не исключается сфера, наиправильнейшая из всех, из которой возникают все прочие тела, как из самой высокой причины — все прочие причины. В ней нет никакого разнообразия, но она — единство всего и в каждом месте имеет начало и конец, правое и левое. Ее форма служит причиной себя, и она последовательно кладет конец тем зависимым [телам], о которых мы говорили, а затем всем остальным продолговатым телам, длина которых больше их ширины.

Глава LVI. **О сферическом теле и его построении**

Сфера многими определяется как причина себя, и особенно Дионисием[77], достойным математиком. Наш автор[78] кратко описывает

[75] Халкидий — римский неоплатоник, перевел на латинский язык и комментировал «Тимей» Платона. Макробий — римский неоплатоник конца IV — начала V в. Апулей — римский философ и писатель II в., комментатор Платона.

[76] В редакции Гейберга это заключение не имеет номера.

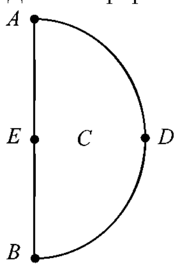
[77] Имеется в виду Псевдо-Дионисий Ареопагит, христианский богослов, один из основоположников апофатического богословия.

[78] То есть Евклид.

ее в своей книге XI, и это описание влечет за собой все последующие, когда он говорит: внутренность половины круга создает сферу.

Сфера есть то, что охватывается внутренностью дуги обвода половины круга {таблица XLI}. Всякий раз берется полукруг с неподвижной линией диаметра, и его дуга совершает оборот и возвращается на то же самое место, с которого начала двигаться; и вот — то, что охватит данный полукруг на этой неподвижной линии в своем полном обращении. Так описанное тело называется сферой, и ее центром будет центр названного полукруга, совершившего такой оборот.

Демонстрация данного определения. Пусть полукруг C построен на линии AB, и его центр есть E, и его дуга ADB будет частью окружности. Я утверждаю, что зафиксировав линию AB, служащую диаметром данного полукруга, и повернув вокруг нее этот полукруг (причем можно начать с точки D, уйти вниз и вернуться сверху к неподвижной дуге с точкой D, или же наоборот, уйти вверх и вернуться снизу к дуге с точкой D, завершив оборот названного полукруга), мы получим указанное сферическое тело, т. е. сферу. Для примера можно представить, что полукруг проходит сквозь вырезаемый материал; но буквально это не создает тела: ведь то, что описывает дуга, не есть внутренность, ибо сама она является линией без ширины и глубины. Вот что сказано о происхождении сферы.



Глава LVII. **Как внутри сферы размещаются все 5 правильных тел**

В этой сфере, Светлейший герцог, представим себе все 5 правильных тел следующим образом. Первым будет тетраэдр: на ее поверхности, которая ее раздевает или одевает, отметим или вообразим 4 равноудаленные друг от друга точки и соединим их 6 прямыми линиями, которые по необходимости пройдут внутри сферы, образовав в точности названное выше тело. И если бы кто в воображении обрезал его со всех сторон с помощью плоской поверхности, следуя протяжению названных прямых линий, он обнажил бы в точности названный тетраэдр. Как будто бы — так другие научатся лучше — данная сфера была камнем для бомбарды, и на ней отметили 4 названные точки равноудаленными метками, а затем обработали, т. е. обтесали ее своими инструментами, сохранив эти 4 точки, и весь этот камень стал бы в точности тетраэдром. Схожим образом на данной сферической поверхности отмечаются 8 равноудаленных друг от друга точек, и они соединяются 12 прямыми линиями; тогда в воображении в данной сфере разместится второе правильное тело, называемое гексаэдром, т. е. кубом и имеющее фигуру дьявольского инструмента — игральной кости. Эти точки так же отмечаются указанным способом на снаряде для бомбарды, и каменотес соединит их тем же способом, что и раньше, и тогда ядро будет усечено до кубической формы. Так же на данной поверхности отмечаются 6 точек, все на равном удалении друг от друга, как было сказано, и если кто их соединит или, можно сказать, свяжет 12 прямыми линиями, в данной сфере будет построено в точности третье правильное тело, называемое октаэдром. Сделаем это на данном камне, и каменотес высечет из ядра тело с 8 треугольными основаниями. И если будут отмечены 12 точек, соединенных 30 прямыми линиями, в данной сфере будет сходным образом размещено четвертое тело, называемое икосаэдром. И каменотес также обтешет камень до тела с 20 треугольными основаниями. А когда 20 точек отмечены указанным способом и соединены 30 прямыми линиями, в данной сфере строится пятое и благороднейшее правильное тело, называемое додекаэдром, т. е. тело с 12 пятиугольными основаниями. И каменотес сделал бы из названного ядра такую же форму. И вот все они в воображении будут схожим образом размещены в сфере, так что угловые точки расположатся на сферической поверхности, и если один угол коснется сферы, то тотчас же коснутся и все прочие; и никак невозможно, чтобы один касался без другого, когда данное тело размещено в сфере.

И по этой безошибочной науке, как мы ее употребили, Ваша Светлость сможет при случае развлечься с каменщиками и тем самым доказать их незнание, приказав им сделать из названного простого камня форму с обтесанными сторонами и равными углами, не схожую ни с одной из пяти правильных; к примеру, велев им сделать капитель, базу или гусек для какой-нибудь колонны, чтобы они были с 4 или 6 равными гранями, но чтобы при этом та грань, что из 4, не была треугольной, или те, что из 6, не были квадратными. Или же чтобы из 8 и из 20 граней ни одна не была треугольной, а из 12 граней ни одна не была пятиугольной, — ведь все это невозможно. Но эти дерзкие хвастуны обещают *Roma e Toma, maria et montes*[79], ибо многие не подозревают, что они не здоровы, и не лечатся от своего неумения, вопреки моральному поучению, которое говорит: «Ne pudeat quae nescieris

[79] «Рим и все остальное (искаж. «Roma et omnia»), моря и горы» (лат.).

te velle doceri»[80]. Точно так же одному плотнику поручили работу, а он, не найдя рубанка, пообещал приладить одно к другому. А другой плотник сказал, что его угольник слишком велик, чтобы выверить по нему малый, предполагая, что прямые углы способны меняться. Еще один установил две одинаковые рейки в форме буквы *тау*, т. е. Т, и потом не один час прилаживал их на глазок. Бывали и другие истории в таком же духе.

Одна из них произошла во время строительства дворца доброй памяти графа Джиролимо в Риме, в присутствии самого графа. Когда шло обсуждение строительства, в котором участвовали многие достойные представители разных факультетов, там среди прочих находился известный живописец Мелоццо да Фрулли; и чтобы дать удовлетворение спекуляциям, которым предавались Мелоццо и я, граф решил сделать некую капитель по одной из этих форм, мы же не обсудили с графом, в чем состоит трудность, но лишь сказали, что это дело достойное. В ответ на такое наше заявление граф призвал к себе мастера и рассказал, что тому следует сделать. Тот ответил, что это небольшая работа и что он выполнял ее много раз, а потому граф засомневался, столь ли это достойное дело, как мы его представили. Мы же, продолжая настаивать на том же самом, открыто заявили, что он не сделает этого из-за невозможности, и, обращаясь к каменщику, который при этом присутствовал, вновь попросили его сделать это. Тогда тот, почти осмеянный, кратко взвесил «да» и «нет» и заявил, что всегда готов приняться за дело. Граф спросил его: «Ну, а если ты его не выполнишь, что бы ты хотел потерять?». Он кратко и неплохо ответил: «Синьор, гораздо больше, нежели тот заработок, которым оценила меня Ваша Блистательная Синьория». И остался этим доволен. Ему предложили 20 дней сроку, а он сказал, что хватит 4; но вышло так, что он запросил много мрамора и приписал 0 на абаке. В итоге граф так и не заставил его выполнить эту работу не в ущерб камням. Он остался посрамленным, но не успокоился, пожелав узнать источник предложенного задания. Выяснив, что это был монах, он затаил на меня немалую обиду, а нашедши, сказал: «Мессир, мессир, я не прощу вам этой несправедливости, если вы не научите меня, как это делать». Я предложил ему приходить, сколько он хочет дней, и еще больше, пока я в Риме, не был с ним грубым и открыл ему эти и другие касающиеся его вещи; он же любезно решил, что меня с ним свели небеса. И вот, обращаясь к Вашей Светлости, я говорю, что в схожих случаях есть повод замечать и другие ошибки, ведь к вам приходят и не такие плотники, и почти каждый презирает остальных.

[80] «Не стыдно тому, кто знает, чего он не знает». — Дистихи Катона, IV, 29.

Так уже поступил Гиерон с поэтом Симонидом[81], как пишет Цицерон в книге *De Natura Deorum*. Этот Симонид хвастливо пообещал за один день точно сказать, что бог есть, утверждая, что это вовсе не так трудно, как считают другие. По прошествии этого срока Гиерон спросил его, нашел ли он бога; тот сказал, что нет, и ему нужно еще прибавить времени. В обоих случаях тот, кто рассчитывал на краткость, в итоге попросил отодвинуть срок, признав, что первого ему не хватило, и остался в замешательстве вместе со своим хвастовством.

Вот что сказано о размещении этих тел в сфере.

Глава LVIII. **О продолговатых телах, у которых длина или высота больше ширины**

Следующими, Светлейший герцог, для полноты сведений в этом нашем трактате надо упомянуть продолговатые тела, т. е. те, у которых длина или высота больше ширины, каковыми бывают колонны и пирамиды. Имеется много видов как тех, так и других, и потому сначала мы поговорим о колоннах и их возникновении, а потом — о пирамидах.

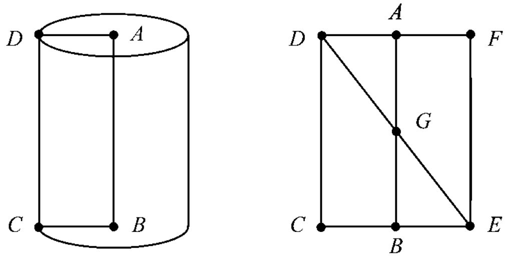
Колонны бывают двоякие, а именно круглые (rotonde) и многогранные (laterate). Так, среди плоских фигур одни являются криволинейными, и это такие, которые ограничены кривыми, т. е. изогнутыми линиями, а другие являются прямолинейными, и это такие, которые ограничены прямыми линиями. Круглая колонна — это тело, находящееся между двумя равными круглыми основаниями, параллельными между собой {таблица XLII}. Наш философ определяет ее в книге XI так: круглая телесная фигура равного по высоте поперечника, основания которой суть два плоских круга на концах, — это то, что охватывается прямоугольным параллелограммом с неподвижной стороной, прилежащей к прямому углу, когда его плоскость совершает оборот и возвращается на исходное место. Такая фигура называется круглой колонной. И еще: у круглой колонны, у сферы и у круга один и тот же центр[82].

К примеру, пусть имеется параллелограмм $ABCD$, т. е. четырехугольная плоскость с параллельными сторонами [и прямыми углами]. И пусть при неподвижности стороны AB весь параллелограмм совершает полный оборот и возвращается на свое место, откуда он начал двигаться. Телесная фигура, которую описывает параллелограмм в своем движении, называется круглой колонной, и основания ее суть

[81] Симонид Кеосский (556–468 до н. э.) — древнегреческий лирический поэт.

[82] Имеются в виду сфера, описанная около кругового цилиндра, и круг, вращением которого вокруг его диаметра эта сфера образуется.

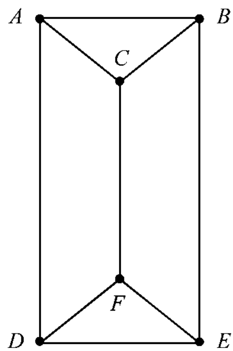
два круга. Точка B является центром, а другим кругом будет тот, который создает линия DA в своем движении, т. е. вращении, и его центр есть точка A. Осью этой колонны служит названная линия AB, которая была закреплена при движении параллелограмма. И если мы представим себе параллелограмм $ABCD$, когда он перешел в своем вращении на место $ABEF$, и соединим его с местом, из которого он начал двигаться, следуя продолжению плоской поверхности, в соединении получится параллелограмм $DCEF$, в котором мы проведем диаметр DE, который будет также диаметром колонны.



И сказано, что у колонны, сферы и круга будет один и тот же центр, подразумевая, что они имеют один и тот же диаметр. К примеру, уже сказано, что DE есть диаметр данной колонны, и пусть диаметром сферы и круга тоже будет линия DE, тогда они необходимо имеют тот же самый центр, что и данная колонна. Линия DE делит линию AB в точке G, и G будет центром колонны, ведь она делит на равные [части] ось колонны и диаметр колонны; а это доказывается по предложению 26 книги I, ведь углы при G равны по предложению 15 книги I, а углы при A и при B — прямые по предположению, и линия AD равна линии BE; и вот DG равна EG, и AG равна GB. И еще углы C и F — прямые. Теперь из точки G соединением DG — и в результате на линии DE — строится круг, который проходит через точки C и F по обратному к первой части предложения 30 [=31] книги III. Итак, точка G есть центр круга, диаметр которого является диаметром колонны, но также и диаметром сферы, и потому утверждается, что всякий прямоугольный параллелограмм в круге и всякая колонна в сфере являются вписанными. И так ясно, что в названном определении круглой колонны предложена теорема нашего философа, и это условие является достаточным. Теперь мы, как обещали, поговорим о многогранных колоннах.

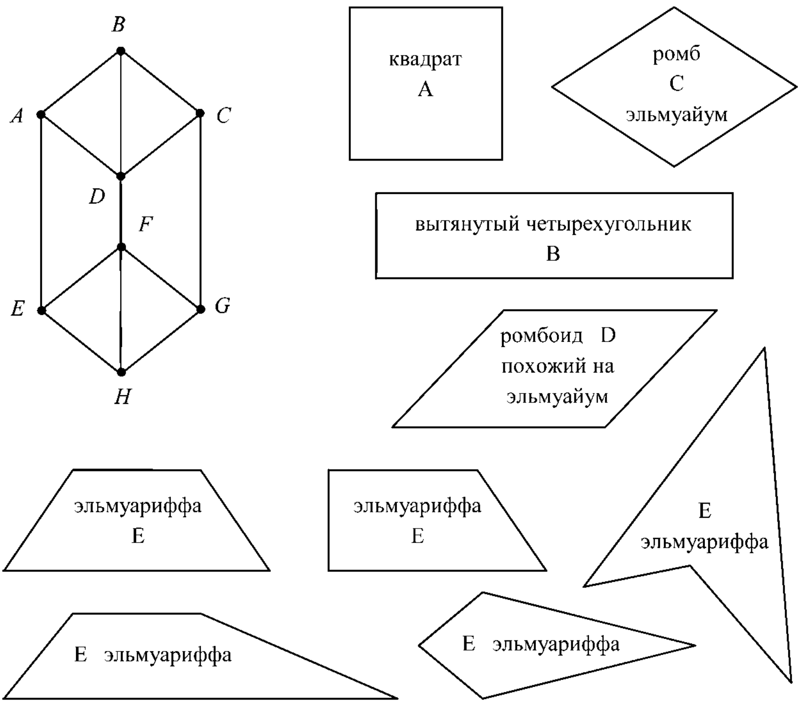
Глава LIX. **О многосторонних колоннах, и сперва о трехсторонней**

Другим видом, т. е. сортом колонн являются многосторонние. Из них первой по порядку идет треугольная {таблицы XLIII, XLIV}, у которой ее основания, верхнее и нижнее, суть два параллельных между собой треугольника, согласно высоте колонны, как она начерчена, где треугольник ABC является верхним, а треугольник DEF является нижним. Схожей с ней фигурой, говорит наш автор, является тело, называемое призмой (seratile), схожее с кровлей дома, имеющей 4 ската, из которых только два сходятся по общему коньку, как показывает глаз. Она может иметь основания равносторонние [и неравносторонние]. В такой колонне 3 ее грани всегда являются параллелограммами, с 4 сторонами и прямыми углами; а названная телесная призма охвачена 5 плоскостями, из которых три будут четырехугольными и две — треугольными.



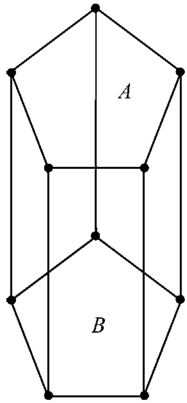
Глава LX. **О четырехсторонней колонне**

Второй сорт многогранной колоны — четырехсторонняя {таблицы XLV, XLVI}, т. е. та, которая также имеет два четырехугольных основания; а четыре другие плоскости окружают ее [по бокам], и противоположные четырехугольники [оснований] параллельны между собой. И они бывают как равносторонними, так и неравносторонними, следуя устройству оснований, ведь плоские четырехсторонние прямолинейные фигуры бывают 4 сортов. Первая называется квадратом, и у нее все стороны равные и углы прямые, как показано на фигуре A. Вторая называется вытянутым четырехугольником, и у нее противоположные стороны равны и углы также прямые, но длина у нее больше ширины, как показано на фигуре B. Третий сорт называется *эльмуайум*, и это равносторонняя, но не прямоугольная фигура, и иначе она называется ромбом, какова фигура C. Четвертый сорт называется *похожий на эльмуайум*, а по другому имени — ромбоид, и у него противоположные стороны равны и между собой параллельны, но углы не прямые, как показывает фигура D. Все прочие фигуры, имеющие 4 стороны, называются *эльмуариффа*, т. е. неправильные, каковы фигуры, обозначенные E. Следуя этому различению оснований, могут быть различные четырехсторонние колонны, но нужно понимать, что основания у них по высоте всегда будут параллельными между собой. И одни из них мы можем назвать правильными по их основаниям, а другие — неправильными, т. е. эльмуариффами.



Глава LXI. **О пятигранной колонне**

На третьем месте идет пятиугольная колонна таблицы XLVII, XLVIII, т. е. колонна с 5 гранями, как на фигуре AB, где каждая грань — это четырехугольник, т. е. четырехсторонник. И основаниями таких колонн всегда служат два пятиугольника, т. е. две прямолинейные фигуры с 5 сторонами, т. е. углами, ведь во всех прямолинейных фигурах число углов соответствует числу их сторон; и иначе не может быть.

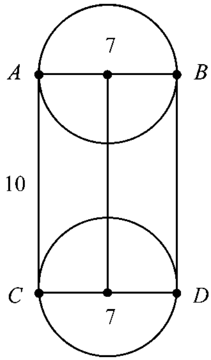


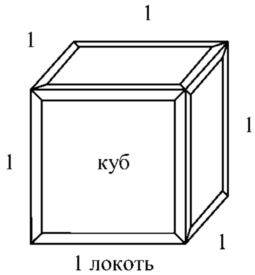
И еще она может быть равносторонней и неравносторонней, в соответствии с дозволенными основаниями, как уже говорилось для случая четырехсторонних колонн. Ведь одни пятиугольники являются равносторонними и равноугольными, и другие — неравносторонними и, следовательно, неравноугольными, но всякий равносторонний пятиугольник, имеющий 3 равных угла, по необходимости будет равноугольным, как показано в предложении 7 книги XIII. Это сказано, поскольку пятиугольник может иметь равные стороны и два равных между собой угла, но не быть весь равноугольным. И эти два пятиугольника, верхний и нижний, также оказываются параллельными по их высоте в этой колонне, будь эта колонна по желанию равносторонней или неравносторонней. И по сему, Светлейший герцог, виды многогранных колонн могут возрастать до бесконечности согласно разнообразию прямолинейных фигур с бо́льшим или меньшим числом сторон; однако всякая многогранная колонна имеет два основания, верхнее и нижнее, и они по необходимости будут одинаковыми прямолинейными фигурами, совпадающими по числу сторон, — и не может выйти так, что одна будет треугольной, а другая четырехугольной. И они могут по-разному формировать колонну, и иногда они будут равносторонними, а иногда неравносторонними, но при однородности колонны они будут равносторонними и равноугольными между собой. По этой причине я не считаю нужным больше о них говорить, надо лишь зафиксировать в памяти, что их наименование всегда производится от оснований — так, как называются основания. К примеру, если основания будут треугольными, как это было сказано выше о телесной призме, колонна будет треугольной; и если они будут четырехугольными, т. е. четырехсторонними, она будет называться четырехугольной; и если пятиугольными — пятиугольной; и с 6 сторонами будет зватьсяся шестиугольной {таблицы XLIX, L}, и так далее. Но каковы бы ни были основания по количеству [сторон], всегда во всякой колонне они будут прямоугольными четырехугольниками. Это условие предстает глазам в материальных формах, которые для названных чисел изображены на таблице. И еще — под каждой из них на плоской фигуре в перспективе, как это может видеть Ваша Светлость.

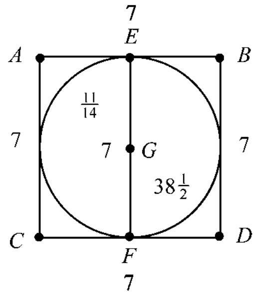
Глава LXII. **О способе измерять все виды колонн, и сперва о круглой**

Теперь пора предъявить способ измерения для всякого сорта колонн. Они полностью описаны в нашем сочинении, тем более что к тому меня побудил знак Вашей Светлости; и первый — для всех круглых колонн {таблица LII}, поскольку для них имеется общее правило. Сначала одно из ее оснований превращается в квадрат приближенным способом, найденным благородным геометром Архимедом; этот способ описан в его книге *О квадратуре круга*, а в нашем сочинении приведено его доказательство. Он состоит в следующем: находится диаметр основания, умножается на себя, от произведения берется $\frac{11}{14}$, т. е. одиннадцать четырнадцатых, и результат умножается на высоту колонны, так что последнее произведение будет телесной массой всей колонны.

К примеру, для лучшего усвоения сказанного, пусть имеется круглая колонна $ABCD$, и ее высота AC или BD равна 10, а диаметры обеих оснований AB и AD равны 7. Я говорю, что для квадрирования этой и всякой подобной ей колонны берется один из названных диаметров, AB или CD, что безразлично, поскольку они равны, т. е. составляют 7; и это 7 надо умножить само на себя. Получится 49, и от него берется $\frac{11}{14}$, что дает $38\frac{1}{2}$. Его следует умножить на высоту или длину всей колонны, т. е. на BD или AC, каковые положены равными 10. Получится 385, и такова будет вся вместимость, т. е. весь телесный воздух названной колонны. И по случаю я хочу сказать, Светлейший герцог, что если эти числа означают локти того сорта, какой нам захочется, в ней будет 385 кубов {таблицы VII, VIII}, имеющих по всякому направлению один локоть: локоть по длине, локоть по ширине и локоть по высоте, как показывает фигура сбоку. И если эти числа означают футы, то будет то же, что сказано для локтей, и если ладони — будут ладони, и так далее. Разложив данную колонну на кубы, мы их получим 385; и для понимания этого достаточно. Для квадратуры и обмера названных круговых оснований имеются многие другие способы, изложенные по порядку в нашем сочинении.





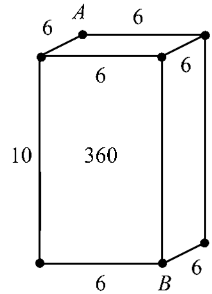


И названные $\frac{11}{14}$, т. е. 11 из 14 частей, берутся при умножении диаметра на себя в любом круге постольку, поскольку Архимедом найдено с хорошим приближением, что круг к квадрату своего диаметра будет как 11 к 14. Это значит, что если квадрат диаметра взять 14, то круг с разумной точностью будет 11. И несколько иначе, как видит глаз на приложенном чертеже, что круг меньше названного квадрата на те углы, которые остаются при удалении круга из квадрата; каковые углы составляют $\frac{3}{14}$ от всего квадрата, т. е. 3 из 14 частей. А 11 [частей] включены в площадь круга, что видно в квадрате $ABCD$, стороны которого равны диаметру круга, т. е. линии EF, которая делит его посредине, проходя через точку G — данный центр названного круга, как в начале своей книги I рассказывает наш философ. Вот что говорится о круглой колонне.

Глава LXIII. **О том, как измерять все многогранные колонны**

Показав способ измерения круглой колонны, перейдем к многогранным. Для них точно так же имеется общее правило, причем точное, и оно состоит в том, что всегда квадрируется одно из ее оснований, какое захочется, и потом результат умножается на высоту или длину названной колонны. И это последнее произведение в точности равно ее телесной массе, т. е. вместимости, сколько бы у нее ни было граней, и всегда безошибочно.

К примеру, пусть имеется четырехгранная колонна AB, и ее высота равна 10, а стороны ее основания по каждому направлению равны 6. Я говорю, что сначала квадрируется одно из этих оснований, и поскольку оно равностороннее, сторона умножается на себя, т. е. 6 на 6 будет 36, и это будет точная площадь основания. Теперь говорю, что этот результат умножается на высоту или длину всей этой колонны, каковая равна 10. Получится 360. И столько локтей или футов в точности будет содержать эта колонна таблицы XLV, XLVI, так же как выше говорилось о круглой.

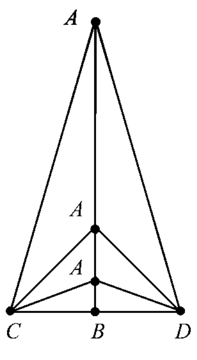


И если бы ее основания были неравносторонними или вовсе неправильными, они все равно квадрируются, следуя норме, описанной в нашем сочинении, и результат умножается на высоту, и это правило безошибочно в любом случае. И в приложении ко всем остальным будет служить то же самое правило, будь они треугольные, пятиугольные, шестиугольные, семиугольные и так до бесконечности; т. е., следуя его требованию, сначала нужно измерить основания: если они треугольные — по правилу для треугольных, если пятиугольные — по правилу для пятиугольных, и если шестиугольные — точно так же. Правила для этих форм и фигур распределены по нашему названному сочинению, каковое легкодоступно по многочисленности отпечатанных копий и по тому, как оно уже распространилось во вселенной, так что я не забочусь об их ином утверждении. И так мы можем покончить с названными колоннами и затем перейти к пирамидам.

Глава LXIV. **О пирамидах и всех их разновидностях**

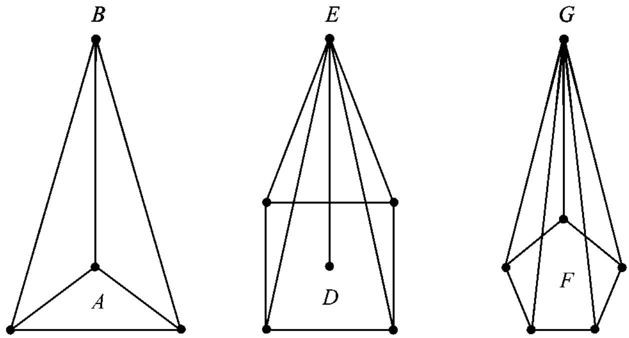
Далее по порядку, Светлейший герцог, следует сказать о пирамидах и их разнообразии, и сначала о той, что называется круглой пирамидой, а затем последовательно обо всех других. И для полного сведения скажем с нашим философом в его книге XI, что круглая пирамида {таблица L} — это телесная фигура, охваченная прямоугольным треугольником, при неподвижности одной из его сторон, охватывающих прямой угол, а он совершает оборот так, что возвращается на то место, откуда он начал двигаться. И если неподвижная сторона равна вращающейся, фигура будет прямоугольной, если длиннее — остроугольной, если короче — тупоугольной. Ось данной фигуры есть фиксированная, т. е. неподвижная сторона, и ее основание будет кругом. И она называется пирамидой круглой колонны.

К примеру, для лучшего усвоения сказанного, пусть имеется треугольник ABC с прямым углом B, и пусть его неподвижной стороной будет AB. При ее неподвижности обратим названный треугольник так, чтобы он вернулся на то место, откуда начал двигаться. И вот уже телесная фигура, описанная, т. е. построенная движением этого треугольника, — это и есть названная круглая пирамида. У нее имеются три разновидности: одна — прямоугольная, другая — остроугольная, третья — тупоугольная. И первая получается, если сторона AB равна стороне BC; а когда линия BC при вращении перейдет на место линии BD так, что точка C попадет на точку D, должна будет получиться та же самая линия. И это понятно, поскольку теперь она соединяется с местом, из которого начала двигаться, сообразно прямоугольности. И эта как бы линия будет BCD. И поскольку по предложению 32 книги I и по ее же предложению 5 угол CAB равен половине прямого, угол CAD будет прямым, и поэтому такая пирамида будет называться прямоугольной пирамидой. Но если сторона AB длиннее стороны BC, пирамида будет остроугольной, поскольку теперь по предложению 32 книги I и по ее же предложению 19 [=18] угол CAB будет меньше половины прямого, и поэтому угол CAD будет меньшим прямого и острым. Так что данная пирамида — остроугольная. А если сторона AB короче стороны BC, угол CAB будет больше прямого по предложению 32 книги I и по ее же предложению 19 [=18], и весь CAD, двойной в сравнении с CAB, будет большим прямого и тупым. Такая пирамида — тупоугольная. И ось этой пирамиды — это названная линия AB; а ее основание — круг, описанный линией BC, когда она обернулась вокруг центра B. И это — пирамида круглой колонны, т. е. той, которую производит параллелограмм на двух линиях AB и BC при неподвижной стороне AB, как это было сказано выше для круглой колонны. И о круглой пирамиде и ее разновидностях этого будет достаточно. Теперь речь пойдет о других [пирамидах].



Глава LXV. **О многогранных пирамидах и их разновидностях**

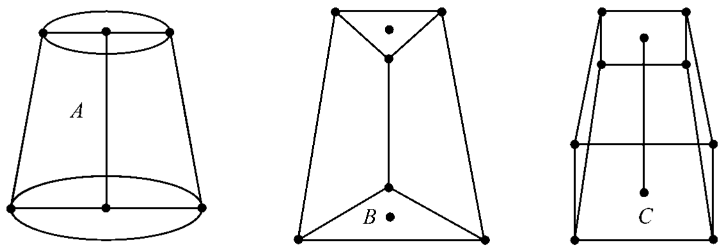
Многогранные (laterate) пирамиды, Светлейший герцог, бесконечны по сортам, подобно разнообразию тех колонн, от которых они происходят, как мы вскоре заключим. Но сначала вслед за нашим философом мы установим определение из его книги XI, где он говорит, что многогранная пирамида есть телесная фигура, заключенная между плоскостями и восставленная от одной плоскости к противоположной точке. И тем самым отмечено, что во всякой многогранной пирамиде все плоскости, которые ее окружают, исключая ее основание, поднимаются к точке, которая называется конусом пирамиды; и все такие боковые плоскости являются треугольниками, но основание в большинстве случаев треугольником не является, как изображены в линиях треугольная пирамида A с конусом B, четырехгранная пирамида D с конусом E и пятиугольная пирамида F с конусом G.



И все это лучше видно в их собственных материальных формах, сплошных и полых, на перспективных планах с номерами LI, LII, LIII, LIV, LV, LVI. И они производятся из многогранных колонн, о чем сказано выше, таким образом, что на одном из оснований многогранной колонны отмечается, т. е. воображается точка, и она соединяется прямыми линиями с каждым из прямолинейных углов другого противоположного основания этой колонны. Теперь будет точно построена пирамида этой колонны, имеющая столько же треугольных плоскостей, сколько в основании данной колонны было линий, т. е. сторон. Колонна и ее пирамида будут называться одним и тем же числом, так что если многогранная колонна будет трехсторонней, т. е. треугольной, то и ее пирамида будет называться треугольной; и если эта колонна будет четырехсторонней, то и ее пирамида будет называться четырехсторонней; и если пятиугольной — то пятиугольной, и так далее.

И утверждается, как только что было сказано о названных колоннах, что их виды могут множиться до бесконечности, следуя разнообразию и изменениям их прямолинейных оснований; и они, как мы говорим, должны происходить из своих многогранных пирамид, так что всякой колонне, т. е. цилиндру, соответствует ее пирамида, круглая или многогранная. И эта точка, которая помечается на ее основании, не обязательно должна находиться в середине основания; но хотя это и не важно, все же если названные прямые линии выходят в точности из средней точки, такая пирамида называется прямой по отвесу, а другие называются наклонными, т. е. косыми {таблицы LVII, LVIII}.

Имеются также и другие пирамиды, укороченные, и это те, которые не доходят до точки конуса, но им недостает вершины, и они называются обрезанными, т. е. усеченными. По сортам их столько же, сколько и целых, и называются они круглыми или многогранными, и в линиях показаны круглая обрезанная A, укороченная треугольная B, усеченная четырехугольная C. Теперь настало время поговорить об их совокупном измерении.

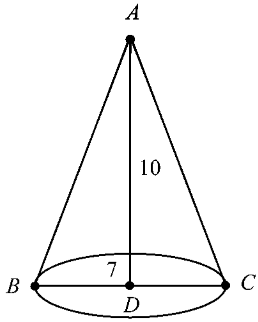


Глава LXVI. **О способе и пути узнать меру всех пирамид**

Верная и точная величина и мера всякой целой пирамиды, Светлейший герцог, будь она круглой или многогранной, получается из величины ее колонны следующим образом. Сначала мы найдем площадь, т. е. пространство основания той пирамиды, которую мы намереваемся измерить, следуя приведенному выше правилу отыскания телесной массы всей колонны, круглой или многогранной, и найденное умножим на ось, т. е. на высоту пирамиды: то, что получится, будет вместимостью всей ее колонны. И от этого последнего умножения мы всегда берем $\frac{1}{3}$, т. е. третью часть, и в точности такой будет телесная величина данной пирамиды, и всегда безошибочно.

К примеру, пусть имеется круглая пирамида ABC, основанием которой служит круг BC с диаметром 7, и ее высота AD равна 10. Я говорю, что сначала мы квадрируем основание, как это делалось выше для круглой колонны: ведь сказано, что колонна и пирамида имеют одно и то же основание и одну и ту же высоту. Имеем для плоскости основания $38\frac{1}{2}$, что умножается на ось AD, т. е. на 10, и получается

385 для вместимости всей ее колонны. Теперь я говорю, что от этого берется $\frac{1}{3}$. Получается $128\frac{1}{3}$, это и есть величина названной пирамиды.



И следует заметить о достигнутой точности, что в круглой колонне полученное число соответствует найденной к настоящему времени пропорции между диаметром и окружностью, и, как было сказано выше, между 11 и 14. Как сказано в соответствующем месте, эти числа не точны, но имеют малое отклонение, что найдено Архимедом. Но это не относится к сказанному о том, что круглая пирамида по величине составляет точно $\frac{1}{3}$ от ее круглой колонны, каковое соотношение является точным, хотя по неведению квадратуры круга результат и не может быть точно выражен в числах. И она составляет $\frac{1}{3}$. И названная колонна будет трехкратной, т. е. в три раза большей в сравнении со своей пирамидой, как доказано в предложении 9 [=10] книги XII.

Но все другие многогранные колонны могут быть точно измерены численно, если они имеют прямолинейные основания. И установленное для круглой должно наблюдаться схожим образом и во всех многогранных. Поскольку для них в предложении 6 [=7] книги XII доказывается, что они являются трехкратными, т. е. в три раза большими своих пирамид. И этого сказанного об их измерении будет достаточно.

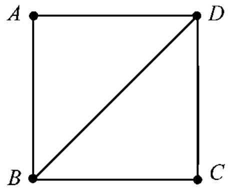
Глава LXVII. **Как показывается, что многогранная пирамида составляет треть своей колонны**

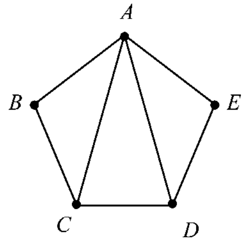
В предложении 6 [=7] книги XII, Светлейший герцог, наш философ заключает, что телесная призма — каковая является первым видом многогранной колонны, как было сказано выше, — делится на три равные пирамиды с треугольными основаниями, и, следовательно, названное тело является трехкратным в сравнении с каждой из них. Этим свидетельством показывается, что всякая пирамида есть треть своего цилиндра, т. е. колонны. Отсюда и происходит данное выше правило, что от величины всей колонны берется $\frac{1}{3}$, что ясно видно в прямолинейной колонне, поскольку все они разделяются на столько телесных призм, на сколько треугольников могут быть разбиты их основания, и они всегда состоят из стольких [призм], как доказано в предложении 8 [=6] книги XII. И вот, четырехсторонняя колонна, основание которой, будучи четырехсторонним, разбивается на два треугольника проведенной в нем диагональю, каковая идет из одного угла в противоположный; и над этими треугольниками воображаются, а затем реально строятся две телесные призмы. И поскольку каждая из них будет трехкратной в сравнении со своей пирамидой, следовательно, обе они вместе будут трехкратны в сравнении с обеими своими пирамидами. Но ведь обе призмы — это и есть вся четырехсторонняя колонна: и вот две пирамиды этих двух призм будут $\frac{1}{3}$ всей данной колонны, и эти две пирамиды будут в точности одной общей пирамидой всей этой колонны, поскольку две их призмы составляют всю колонну, будучи двумя ее равными и объединенными частями. И данное правило безошибочно по всем приведенным доводам. И точно такое же следствие проявляется во всякой многогранной колонне, как будет в третьем ее виде, названном пятиугольном, основание которого разбивается на 3 треугольника. И поэтому говорится, что вся колонна состоит из трех телесных призм, каждая из которых трехкратна в сравнении со своей пирамидой, и поэтому все 3 трехкратны в сравнении со всеми 3 пирамидами, и все они вместе могут быть названы одной для всей колонны, поскольку 3 призмы составляют всю колонну. И то же самое проистекает во всех других [случаях].

И названное разбиение оснований на треугольники показано в предложении 32 [=34] книги I, где заключается[83], что всякая многоугольная фигура, т. е. такая, у которой больше углов и сторон, всегда разбивается на столько треугольников, сколько имелось углов или же сторон, за вычетом двух. К примеру, четырехугольная фигура имеет 4 угла и, следовательно, 4 стороны: и она разделяется, по меньшей мере, на два треугольника, каковое минимальное разделение проявляется в ней проведением прямой линии из одного из ее углов в другой противоположный, как это видно на фигуре квадрата $ABCD$, который разделен на два треугольника ABD и BCD линией BD, каковая в искусстве называется диагональю и еще диаметром.

И так же пятиугольник разбивается, по меньшей мере, на три треугольника, т. е., по общему правилу, на два треугольника меньше, чем у него имеется углов или же сторон. Это будет видно, если в изображенном [пятиугольнике] один его угол связать с двумя другими про-

[83]В редакции Гейберга такого заключения нет.





тивоположными двумя прямыми линиями, как это сделано на пятиугольнике *ABCDE*. Из его угла *A* к двум противоположным *C* и *D* проведены линии, разбивающие его на 3 треугольника *ABC*, *ACD* и *ADE*. И всякая такая линия в искусстве называется хордой пятиугольного угла. И также шестиугольник разбивается на 4 треугольника, и так далее.

Так что многим, Светлейший герцог, мы обязаны древним, просветившим в своем бдении наши умы, и особенно нашему мегарцу Евклиду, который объединил и упорядочил достижения предшественников, присоединив к этим выдающимся дисциплинам и математическим наукам свои тщательно составленные доказательства. И во всем его возвышенном сочинении проявился его гений, не человеческий, но прямо-таки божественный, особенно в книге X, в которой воистину столько высочайшего, сколько вообще доступно человеку. И я не могу понять, что еще он мог сказать об этих абстрактнейших линиях, иррациональных, так что его наука глубже всех других, и их суду она уже не подлежит. Вот и все, что говорится о целых пирамидах в предложенном аспекте.

Глава LXVIII. **Как измеряются укороченные пирамиды**

Что касается пирамид укороченных, т. е. усеченных, их измерение производится посредством целых, и несовершенное сводится к своему совершенному следующим образом. Сначала данная укороченная [пирамида] достраивается до целой тем способом, который описан в нашем опубликованном сочинении, и эта целая пирамида измеряется вышеназванными способами. Затем теми же способами мы находим меру той пирамидки, которую присоединили к усеченной, чтобы сделать ее целой; и величину этой пирамидки мы вычитаем из величины всей большой, которую мы сохранили. Остаток по необходимости будет точной величиной названной усеченной пирамиды. Этот путь — самый короткий и надежный среди прочих; и будет ли она круглой или многогранной, наблюдается одно и то же.

Глава LXIX. **Об измерении всех прочих правильных и зависимых тел**

Осталось сказать о размере правильных тел и зависимых от них, однако о названных правильных телах я не забочусь, поскольку о них уже составлен специальный трактат для блистательного родственника Вашей Герцогской Светлости Гвидо Убальдо, герцога Урбинского, каковое наше сочинение посвящено Его Светлости; и читателю легко с ним ознакомиться, поскольку это приношение опубликовано и к общей пользе, как было сказано, и в этом вашем славном городе многие с ним уже ознакомились. Мера этих тел, гораздо более спекулятивная, поскольку они — самые выдающиеся и совершенные изо всех прочих, безусловно представляет собой материю возвышенную, а не ерундовую. И в том месте о них было сказано достаточно. Но способ для других, от них зависимых, сходен с тем, что был дан для укороченных пирамид: их нужно приводить к полным совершенным, и уже эти, по нашим правилам, изложенным в названном месте, тщательно измерять. Эта величина запоминается, а потом находится величина построенного дополнения, по правилу измерения пирамид, и когда это сделано, она отнимается от величины всего правильного тела. Остаток будет точной величиной названного зависимого тела.

Если названное зависимое тело было из числа усеченных, каков усеченный тетраэдр, у которого недостает надстроек в сравнении с целым, причем все они являются равными и однородными пирамидками, одно измерение производится сразу же, и к нему сводятся все прочие, сообразно числу пирамидок, достроенных на его сторонах, т. е. на основаниях, к чему нужно всегда возвращаться на практике; и те отнимаются от своего целого, как было сказано. Если же названное зависимое тело было из числа надстроенных, то тогда, чтобы получить его меру, к его совершенному телу прибавляется величина всех его пирамидок, которых по необходимости будет столько, сколько оснований у его совершенного тела. Итак, говоря более или менее кратко, нужно судить о названных телах в свете их совершенных, прибавляя или отнимая, сообразно тому, что нужно. Взыскующие иного впали бы в неразрешимый хаос. И все же этот документ будет самым подходящим, не ограждая меня от изощренных гениев и спекулятивных умов, обладающих теми или иными способностями, каковые мы всегда находим во всем нашем деле; а особенно — от необычайного и неоспоримого превосходства, каковое имеет над другими Ваша Герцогская Светлость, так что я никоим образом не знаю, что могу сказать ей как о простых, так и о других телах. Так что [это мое сочинение] выполнено и украшено безотносительно к другим: ведь если я пожелаю их расширить, мне не хватит ни бумаги, ни жизни. «Sed quod patet expresse non est probare necesse».

Когда под ее [Вашей Светлости] солнцем я вижу здоровье и радость, волнующую каждый взгляд, это воистину то самое солнце, которое согревает и освещает тот и другой полюс. И кто больше нее считает себя ныне ничтожнейшим из смертных? Не она ли одна дарует покой и прохладу, и не только Италии, но и всему христианскому миру? Это она — роскошная, обширная, блистательная и выказывающая каждому свое великодушие; в ней сострадание, в ней милосердие, в ней величие, в ней все участвует в создании блага. Демосфен с Цицероном и Квинтилианом уступают ее устам — источнику, речь из которого льется широким потоком, нектаром для добрых людей и суровым клинком для королей. Это она самая ревностная изо всех религий, и ее храмы не только восстанавливаются, но и постоянно возводятся; и она всегда, днем и ночью, полностью посвящена божественным делам, с немалым почтением, которое монахи оказывают священнейшим прелатам и которое с особым благочестием утверждает ее достойнейшая преданная капелла, предназначенная для божественного культа и украшенная достойнейшими певцами. Это она без промедления обращает свой сострадательный слух ко всякой благочестивой мольбе, и не по особой благосклонности, но свободно — к тому, кто уже не раз прибегал к ходатайству. Поэтому тот, кто никогда не видел ничего нового, по нашим временам вполне заслуженно выделяется среди других, ибо вся вселенная причастна ее благодати. И в ней не меньше согласия, чем во всеобщем мире, который Октавиан утвердил в Риме; есть она и в ее священнейшей такой-то памяти де Грацие [церкви], построенной в славном городе Милане и поныне еще не насыщенной всевозможными украшениями, и во всякой возможной нищете, ей подобающей. Этой краткой речью я обращаюсь к читателю, не чувствительному к лести, который по своей природе, как по профессии, во всем узнает чужое; однако ты из зависти и злобы к Его Светлости совершил не меньше, чем я из лести, будучи предубежденным и не восхищаясь столькими ее превосходствами и небесными дарами[84].

«Sed quod oculis vidimus testamur»[85]. И не только об этом, но со всей моей священнейшей серафической религией, с ее предстателем, особым главой и пастырем, нашим преподобным отцом маэстро Франческо Сансоне из Брешии, достойнейшим генералом нашего главного монастыря, в нынешнем году прославленным в вашем славном городе Милане: а с ним — величайшее число знаменитейших и прославленных имен в священной теологии и других науках, докторов и бакалавров со всей вселенной и изо всякой нации, «quae sub celo est»[86],

[84] В переводе некоторые детали этого фрагмента обязательной лести, к сожалению, исчезли.

[85] «Свидетельствуем о том, что видели глазами» (лат.).

[86] «Какая имеется под небом» (лат.).

постоянно и во всякий день, и соборы и общественные перемены были произведены с постоянным проявлением безмерной человечности, со снисхождением Вашей Герцогской Светлости к своим слугам, вместе с достопочтеннейшей синьорией Монсиньора, с вашим зятем Ипполитом Естензе, с достойнейшим архиепископом Милана и со многими другими членами Вашего замечательного магистрата. Оставляю зрелость и повсюду льющееся изобилие в руках Его Герцогского Высочества для поддержания столь многочисленного истечения, каковое не только послужило присутствовавшим тогда, но его и сейчас хватает последующим на многие месяцы. Поэтому вся меньшая братия полна здоровья и радости, принимая дары Всевышнего с распростертыми руками, а среди них и я, недостойный и жалкий грешник, постоянно Вашей Герцогской Светлости преданно себя вверяющий.

Глава LXX. **Как все эти тела правильно изображаются в перспективе; и еще об их материальных формах, которым для их осмотра приданы специальные таблички**

Там, где нет порядка, всегда возникает смешение; и потому для более полного постижения этого нашего обзора, чтобы знать, как все вышеназванные фигуры изображаются в установленной последовательности в перспективном виде, и еще в материальных [формах], приложены таблички, которые Ваша Светлость будет рассматривать следующим образом. Читая выше в сходных главах об их возникновении и построении, нужно смотреть на пометку, сделанную на полях книги числом, записанным старинными знаками, каковая пометка впервые появляется в главе 48, а именно I, II, III, IV, V и так до конца. Точно такое же число нужно найти ниже, где по порядку изображены все названные тела; это то же самое число, что и поставленное в соответственном месте на полях: I к I, II к II, III к III, и так далее. И эта фигура для данного тела будет изображена на плоскости со всем совершенством перспективы, как умеет наш Леонардо да Винчи. В точности такие же номера будут найдены и у материальных форм данных тел, каждая из которых висит над табличкой с именами на греческом и латыни на коротком подвесе между двумя опорами из черного янтаря. И всякая [форма] будет соответствовать, как сказано, номеру, проставленному на полях там, где о ней говорится. И Ваша Светлость будет рассматривать их тем и другим способом, причем они сделаны не из подлой материи — как я делал для себя по своей крайней нужде — но из верного металла и украшены тонкими достойными геммами. Ваша Светлость, может быть, оценит чувство и душу своего вечного слуги.

Глава LXXI. **О словах, собранных в этом словаре и используемых в математике: гипотеза, гипотенуза, стяжка, пирамидальный конус, хорда в пятиугольнике, перпендикуляр, катет, диаметр, параллелограмм, диагональ, центр, стрелка**

Имеются некоторые слова, Светлейший герцог, принятые среди знатоков математических дисциплин, дабы ум не запутывался ни в какой их части, хотя они и наводят скуку на того, кто в этом деле неопытен; и выше в этом нашем обзоре они часто встречались, и чтобы не отклоняться от древних, мы их тоже рассмотрим. Мне представляется, что сведения о них будут небесполезны для читателя.

Первой будет гипотеза. Под гипотезой следует понимать предположение, допущенное и согласованное между автором и противоположной ему стороной, при посредстве которого выводятся заключения, и наоборот, из которого не следуют заключения. И когда его не получается допустить, оно оказывается невозможным.

Что такое гипотенуза в геометрии. Под гипотенузой во всякой прямолинейной фигуре понимается наибольшая прямая линия, противоположная ее наибольшему углу. Но в собственном смысле в искусстве так принято называть сторону, противоположную прямому углу в прямоугольных или ортогональных треугольниках, каковые всегда составляют половину от квадратной или вытянутой прямоугольной фигуры, причем эта последняя прямоугольная фигура имеет бóльшую длину в сравнении с шириной.

Что такое стяжка между прямыми линиями. Под стяжкой понимается прямая линия, соединяющая концы двух [прямых], поднятых вверх. И стяжек может быть больше или меньше, сообразно числу поднятых линий.

О конусе, т. е. пирамидальной вершине. Конусом пирамиды называется наивысшая точка вершины, в которой сходятся линии, выходящие из ее основания.

О пятиугольной хорде. Хордой пятиугольника, или пятиугольной хордой, во всяком угле пятиугольника называется прямая линия, проведенная в пятиугольной фигуре из произвольного ее угла к другому противоположному, как это неоднократно делалось выше.

Перпендикуляр. Перпендикуляром называют прямую линию, поднятую или выставленную отвесно над другой [прямой], так что вокруг нее образуются один или больше прямых углов, и так будет, когда она указанным способом восставлена на плоской поверхности. Ее обычно принято находить в треугольниках для их измерения, как мы говорили в соответственном месте нашего упомянутого сочинения.

Катет. Катет означает то же самое, что и перпендикуляр, и в треугольниках простые люди их часто называют «стрелками треугольника». Это слово пришло из греческого языка.

О диаметре. Под диаметром в собственном смысле понимается прямая линия в круге, которая проходит через его центр и своими концами касается окружности в любом месте, и делит круг на две равные части. Но по обычаю также говорят о диаметре квадрата, и чтобы не путаться, говорят о диаметре круга и диаметре квадрата, отличая один от другого.

О параллелограмме. Под параллелограммом понимается плоскость с параллельными сторонами. В собственном смысле он будет четырехсторонним, каковых имеются четыре вида, рассмотренных выше в главе LIX, а именно квадрат, вытянутый четырехугольник, ромб и ромбоид, а по другому имени эльмуайум и похожий на эльмуайум. Но под параллелограммом понимается также всякая фигура с парными противоположными параллельными линиями, такая как шестиугольник, восьмиугольник, десятиугольник и другие схожие с ними, у которых не меньше 4 сторон.

О диагональной линии, что это такое. Под диагональю исходно понималась прямая линия, проведенная в вытянутом четырехугольнике из угла в другой противоположный угол и делящая его на две равные части — в отличие от квадрата. Но теперь ее называют также в ромбе и ромбоиде.

О центре круга. Центром в собственном смысле слова называется средняя точка в круге, в которой устанавливается неподвижная ножка циркуля, когда другая, вращаясь по кругу, описывает линию, называемую окружностью или периферией. И все линии, проведенные из этой точки к окружности, равны между собой. Но теперь и в других прямолинейных фигурах центром принято называть среднюю точку их поверхности: так в треугольниках, квадратах, пятиугольниках, шестиугольниках и других равносторонних и равноугольных фигурах, когда из названной точки в каждый из углов проводятся прямые линии, все они будут равными между собой.

Стрелка. Стрелкой называется прямая линия, которая выходит из средней точки дуги произвольного сегмента круга и падает отвесно на середину его хорды. И говорится о стрелке в отношении части окружности, называемой дугой (arco), по сходству с материальной аркой, где тоже употребляются три имени: хорда, арка и стрелка.

О других принятых словах. Хотя употребляются и другие многочисленные слова, о них мы подробно говорим в нашем большом сочинении, так что я не забочусь об их разъяснении; но я считал нужным разъяснить Вашей Светлости лишь те, которые необходимы уму для понимания настоящего обзора, для чего не требуется столько бумаги, хотя и здесь обсуждалась не меньшая сущность и высочайшие спекуляции. И воистину, Светлейший герцог, не обманывая Вашу Светлость, я скажу, что спекуляции математиков не могут подняться более высоко по достоинству, хотя им случается быть бóльшими и меньшими по количеству. И этим наш мегарский философ заключил и закончил все свое сочинение об арифметике, геометрии, пропорциях и пропорциональности, распределенное по XV книгам, что ясно уму. Но все же немалое благо и достоинство прибавится Вашей вышеупомянутой достойнейшей библиотеке, как мы уже сказали в послании к Вам, поскольку [сей трактат], составленный в таком порядке и из такой материи, уникален и единственен, и никоим образом — сохраненный для Вашей Светлости — не известен во всей вселенной. И здесь, в Вашем славном великом городе Милане, отрешившись от повседневных забот и долгих бдений, под защитой его стен и Вашего почти что сына, моего не по моим заслугам особого покровителя блистательного синьора Галеаццо Сансеверино Арагонского, не уступающего никому из военных, но также и любителя всех наших дисциплин, особенно в день вашего прилежного чтения, когда вы вкусите этот последнейший и сладкий плод.

И вот, ради завершения наших занятий, скромное извинение и должное почтение вечного слуги Вашей Светлости, которой он бесконечно и всяческими способами себя вверяет. «Quae iterum atque iterum ad vota felicissime valeat».

<...>

Завершено
14 декабря в Милане в нашем almo монастыре,
при управляющем всей провинцией преподобном отце,
профессоре Священной Теологии маэстро Франческо
Мозаника, ее достойнейшем министре, MCCCCLXXXXVIII,
у престола Верховного Понтифика Александра VI,
в VII год его понтификата.