

ПЛАТОНОВСКОЕ УЧЕНИЕ О ПРОПОРЦИИ И ВОЗНИКНОВЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Существовало ли математическое доказательство в древнем Вавилоне и древнем Египте? За редким исключением¹ на этот вопрос исследователи отвечают отрицательно.

Если мы говорим о современной форме математического доказательства, об аксиоматическом, дедуктивном выведении одних положений из других, то не подлежит сомнению тот факт, что ее открыли греки. Именно благодаря греческим математикам такая форма математического доказательства распространилась по всему миру.

Обсуждается в основном вопрос о том, кто был первым творцом математического доказательства. Спектр мнений обычно распределяется следующим образом. Большинство называют Фалеса (Ван дер Варден,² А. И. Зайцев³ и др.). Другие пальму первенства отдают Пифагору (П. П. Гайденко).⁴ Третьи настаивают на том, что приоритет открытия принадлежит не самому Пифагору, а первым его ученикам, т. е. сам Пифагор ничего не доказывал. Доказательство возникает в среде первых пифагорейцев.⁵

Попытаемся взглянуть на проблему с несколько иной точки зрения.

Почему древние греки открывают математическое доказательство? Что препятствовало другим народам прийти к такой форме математического доказательства?

Но что означает наше выражение «такая форма доказательства»? Возможна ли какая-нибудь другая форма? Данный вопрос тесно связан с вопросом о том, возможен ли какой-нибудь иной вариант логики? Существовала ли в истории человеческой цивилизации логика, придерживающаяся несколько иных правил, чем привычная нам? Трудami таких исследователей, как Леви-Брюль, Леви-Стросс и др. показано существование специфической логики у первобытных народов. Архаическая логика, или пралогика, вполне успешно выполняет те же функции в своем обществе, каковые выполняет обычная логика в нашем современном мире.

¹Лурье С. К вопросу о египетском влиянии на греческую геометрию // Архив истории науки и техники. Вып. 1. Л., 1993. С. 45–70.

²Ван-дер-Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции. М., 1959.

³Зайцев А. И. Культурный переворот в Древней Греции VIII–V вв. до н. э. Л., 1985.

⁴Гайденко П. П. Эволюция понятия науки. Становление первых научных программ. М., 1980.

⁵Нейгебауэр О. Точные науки и древности. М., 1968.

© В. А. Кульматов, 2000

Однако вопрос о математическом доказательстве и соответствующей ему форме логики, которые были бы предшественниками современной формы доказательства в математике, предполагает рассмотрение обществ на более высокой стадии развития, чем существующие ныне туземные племена Австралии или индейские племена Америки.

К таковым обществам относятся древние цивилизации, где математика и астрономия получили уже достаточно мощное развитие: цивилизации древнего Вавилона, древнего Египта и др.

В истории развития человеческого общества они являются промежуточным звеном между социумами, находящимися на архаической ступени развития, и современной цивилизацией. Но как раз это среднее звено недоступно для нашего непосредственного изучения. В отличие от крайних звеньев этой цепи, существующих в современном мире и доступных прямому исследованию цивилизацией, представляющих среднее звено в том виде, которое необходимо для изучения формы математического доказательства, предшествующих ныне существующей в сегодняшнем мире мы не найдем. Логика связи этих цивилизаций с соответствующей ей формой математики затемнена для нашего понимания.

На древнюю форму логики можно выйти опосредованным путем через сохранившуюся и до настоящего времени связь со способом философствования и через древние тексты.

Но с математикой дело обстоит иначе. Древние тексты с описанием решений различных математических задач существуют. Однако они не дают нам ответа на вопрос: каким образом были получены использующиеся при решении этих задач различные математические формулы и теоремы и почему использовался именно данный алгоритм решения, а не какой-либо другой?

Распространение открытой греками и ставшей привычной для нас формы математического доказательства по всему миру, в том числе в странах с древней историей и в странах, существующих на месте прежних древних цивилизаций, полностью прервало связь логики второго звена и математики. Поэтому восстановить связь логики прошлых эпох с развитием определенной формы математического доказательства возможно только методом реконструкции. С другой стороны, в этом может оказать существенную помощь определенная слитность логики и математического доказательства рассматриваемого нами переходного этапа. Требуется увидеть в логической форме возможность проявления математического содержания.

Что представляет из себя логика, отличающаяся и от архаической, и от современной? Она, являясь связующим звеном между крайними, содержит в себе характеристики первой и последней. В то же время, будучи самостоятельной, отличается и от первой, и от последней.

Логика древнейших цивилизаций представляет собой подражание определенному канону, воспроизведение определенной канонической модели. Причем сама модель еще не отделилась от мифа. Она различена, дифференцирована внутри себя. Подражание ей как образцу правильного мышления, воплощение ее реализуется в последовательном прохождении определенных моментов или в последовательном соотношении между собой определенных ее частей, в совокупности представляющих единое целое. Сама по себе циклическая модель естественно возникает из развития бинарного и циклического характера архаического мышления. Объединение бинарной пары в целое, прохождение каждым элементом этой пары всего цикла в основе своей, скорее всего, имеет наблюдение за циклической сменой небесных явлений.

При развитии земледельческой цивилизации небесные циклы начинают определять хозяйственную жизнь общества. Соответственно этому и формирующийся комплекс календарных мифологически-религиозных представлений, включающий в себя модель определенной циклической закономерности, перестраивает в соответствии с ней моменты жизни данного общества, придает новое оформление закономерностям, установленным ранее. Процессу формирования «главной закономерности» способствует иерархический характер древних государств.

Какой вид имела модель циклического движения небес, проецировавшаяся жрецами на математические отношения чисел и отрезков, косвенным образом можно судить по различным диалогам Платона.

Подробное описание сотворения и функционирования циклической модели космоса дается Платоном в диалоге «Тимей».⁶ Характерно, что само изложение того, как «из наук божественных» выводятся «науки человеческие», ведется устами египетского жреца.

Обратимся к этому описанию. Космос имеет тело и душу. Душу бог сотворил «первенствующей и старейшей», «как госпожу и повелительницу тела». Составил он ее из «сущности, которая неделима и вечно тождественна» и «той, которая претерпевает разделение в телах». Путем их смешения он создает третий вид сущности, помещает ее между двумя первыми и силой принуждает «не поддающуюся смешению природу иного к сопряжению с тождественным». Весь образовавшийся состав он рассекает по длине на две части и складывает эти части крест-накрест наподобие буквы X. Каждую из этих частей он сгибает в круг, «заставив концы сойтись в точке, противоположной точке их пересечения». Он принуждает их к движению по кругу: единообразному и происходящему в одном же месте. Внешнее вращение нарекается им «природой тождественного», а внутреннее — «природой иного».

Отношение внутренней различности, соотношения частей круго-

⁶Платон. Тимей. М., 1971. Т. 3, ч. 1. С. 474–476.

обращающегося целого даются Платоном при описании тела космоса, которое видимо в отличие от невидимой души. При этом излагается теория пропорции. В ней акцентируется момент не столько равенства чисел или отношений, как обычно рассматривается в математике, сколько момент единства, определенной целостности. Платон устами своего персонажа говорит: «... два члена сами по себе не могут быть хорошо сопряжены без третьего, ибо необходимо, чтобы между одним и другим родилась некая объединяющая их связь. Прекраснейшая же из связей такая, которая в наибольшей степени единит себя и связуемое, и задачу эту наилучшим образом выполняет пропорция, ибо, когда из трех чисел — как кубических, так и квадратных — при любом среднем числе первое так относится к среднему, как среднее к последнему, и соответственно, последнее к среднему, как среднее к первому, тогда при перемещении средних чисел на первое и последнее места, а последнего и первого, напротив, на средние места, выясняется, что отношение необходимо остается прежним, а коль скоро это так, значит, все эти числа образуют между собой единство».⁷

Суть нашей гипотезы состоит в том, что в древнем Вавилоне и древнем Египте существовало учение наподобие платоновского учения о божественной пропорции.

Обнаружение наличия такого учения объяснило бы, с одной стороны, характер математического доказательства в древних культурах, точнее, тот способ, каким древневосточные математики выводили теоремы и формулы, с другой же стороны, причины отсутствия того типа доказательства, который открыли древние греки. Они относятся друг к другу как вертикаль и горизонталь.

Канон, круговая модель выполняет роль своеобразной аксиомы. Истинность божественной аксиомы обоснована мифом. Ее очевидность явлена всем и каждому через небесные циклы. Ее использование закрепляется длительной историей данного общества.

Она выражает собой образ целого, наполненного онтологическим, мифологическим и космологическим содержанием. Поскольку она сама выражает принцип полноты и завершенности, она не может на этом же уровне переходить во что-то другое, отличное от нее. Поле, пространство данного уровня ею исчерпывается полностью. Она есть и аксиома, и совокупность всех возможных теорем, вернее, главная и единственная теорема. Вместо горизонтальной плоскости отношения присутствует вертикальная, выражающая воплощение модели в земном мире. Переход совершается на другой уровень, на плоскость проекции эмпирической реальности.

Поскольку такая модель — определенная система, внутри себя структурированная, то именно ее внутренняя различенность образует воз-

⁷ Там же. С. 472.

возможность для вариаций. Они получаются в результате проецирования на различный материал. Разные проекции задают разнообразие алгоритмов.

Когда практика рассматривается не как самостоятельная, а как проявление чего-то вне нее находящегося, тогда получается двухзвенная система, скрепленная алгоритмом решения задачи. Пространство теорем и математических доказательств распределено между практическим применением алгоритма и моделью-канонем. Формулы и теоремы древних оказываются побочным результатом установления тождества между моделью и ее проекцией. Возможно даже, что для древнего человека, исходящего из принципов небесного циклического канона, нет и самого такого разделения. Как нет подобного разделения для верующего между иконой и тем, кто на ней изображен.

Когда нет противопоставления, тогда нахождение решения определенной задачи выступает доказательством данной теоремы или формулы, которые используются при решении, и, что самое главное, одним из бесчисленных подтверждений истинности божественной пропорции. В платоновском «Послезаконии» говорится: «... всякая геометрическая фигура, любое сочетание чисел или гармоническое единство имеют сходство с кругообращением звезд, следовательно, единичное для того, кто надлежащим образом его усвоил, разъясняет и все остальное».⁸

Таким образом, развитие математики, открытие теорем и формул идет не только путем обобщения эмпирической практики, снизу, но и сверху, посредством проекции канонической модели на различный математический материал. Подобный принцип тождества позже будет воспроизводиться в классической немецкой философии, когда завершение построения системы одновременно будет доказательством истинности системы.

Вероятно, в древних восточных государствах, как и в Древней Греции, среди математиков существовало разделение труда. Одни занимались теоретическими вопросами, отыскивая проявления божественной пропорции в различных математических фигурах и числах. Основным результатом таких исследований, с одной стороны, было открытие алгоритмов для решения новых задач, а с другой — открытие теорем и формул как составных частей таких алгоритмов. Другие занимались конкретными вычислениями. Именно о первых говорит Аристотель, когда касается вопроса о возникновении геометрии в Египте вследствие наличия у жрецов свободного времени. Именно у жрецов Вавилона и Египта Пифагор смог познакомиться с теми взглядами, которые он потом развивал сам и передавал своим ученикам. Писцы и землемеры выполняли практические расчеты.

Что происходит при соприкосновении греческой цивилизации с восточной? Греки перенимают математические результаты в отделении от мифологической оболочки. Этому способствуют наряду с общим отличием

⁸Платон. Послезаконие. М., 1972. Т. 3, ч. 2. С. 502.

греческого общества от восточного прежде всего и такие факторы, как наличие собственной мифологии, формирование которой шло вне астрономических и математических изысканий. Отсутствие или ослабление связи с мифологией при перенесении учения о пропорции на новые основания приводит к следующим изменениям: 1) выделяясь в самостоятельный принцип, пропорция освобождает алгоритм от доказательной функции, от его жесткости и каноничности. Поэтому мы наблюдаем у греков при первых же шагах развития математики более свободное оперирование теми же знаниями, которыми владеют египтяне, расширение поля для их применения;

2) лишаясь, с другой стороны, поддержки мифологии, сама пропорция преобразовывается в «настоящее» доказательство.

Вместо того, чтобы небесная модель проецировалась на земную жизнь, у греков на первое место выходит земная модель стадиона, которая проецируется и на небеса.

Числа у пифагорейцев получаются в результате пробегания единицей цикла подобно бегуну на стадионе.

Действие апорий Зенона разворачивается также на стадионе.

Гераклит создает модель небесных бегунов «утра» и «вечера».⁹

Происходит взятие циклической модели с земных оснований. Круг, который выступает примером умопостигаемого, замещается чувственно воспринимаемым, земным, которому, согласно Проклу, «свойственны прямолинейные очертания».

Конечно, распрямление круга совершалось и в Вавилоне, и в Египте. Но там распрямление происходило внутри целого, в основании которого лежал образ круга. В Греции же распрямление происходит внутри целого, в основании которого лежит образ прямой.

Осознание «прямолинейного» основания наступает значительно позже проявления действий мышления, исходящего из такого основания. В логике Аристотель прямую как образ человеческого мышления противопоставляет платоновскому кругу, выражающему образ идеального божественного мышления, которому человеческое должно подражать.¹⁰

В математике распрямление круга находит свое завершение у Евклида в формулировании аксиоматической теории. Аксиомы евклидовой геометрии являются наиболее показательным выражением такого прямолинейного основания.

Следует, однако, оговориться, что образ круга как мирового процесса полностью не исчезает. Центр круга как бы удаляется в бесконечность,

⁹Лебедев А. В. Агональная модель космоса у Гераклита // Историко-философский ежегодник 87. М., 1987. С. 29–46.

¹⁰Кульматов В. А. Аристотелевский силлогизм и платоновская пропорция: Тезисы докладов // Научная конференция «Современная логика: проблемы теории, история и применения в науке», 16–17 июня 1994 г., ч. 2. СПб., 1994. С. 22–24.

преобразуя окружность в прямую линию. Более того, у философов и математиков, в той или иной мере придерживающихся взглядов Платона, круг появляется вновь и вновь на протяжении всей истории вплоть до нашего времени.

Первые доказательства, осуществленные Фалесом и Пифагором, скорее всего были прямыми следами с тех форм доказательств, которые существовали в математике Египта и Вавилона, т. е. проекция круговой пропорции на какой-либо материал. Маловероятно, чтобы они содержали в себе дедукцию. Приписываемые Фалесу теоремы «тесно связаны с симметрией и перемещением фигур», т. е. имели наглядный способ демонстрации, апеллирующий к очевидности и здравому смыслу. Характерно и то, что когда речь идет об углах при пересекающихся прямых, о них говорится не как о равных, а как о подобных, что также указывает на связь с пропорцией.

В свою очередь, разделение Пифагором линейки на 12 частей для исследования различных гармонических средних есть проекция на прямую подобного кругового разделения дня и года на такое же количество частей, незадолго до этого перенятое греками у вавилонян.

Древнейшая часть евклидовой геометрии, относящаяся к теории чисел и уходящая своими корнями к пифагорейцам, в основе своей также имеет учение о пропорции.

Фалес и Пифагор берут разные блоки, осуществляют проекцию различных составляющих того сложного комплекса, чем являлась «теоретическая» математика жрецов Вавилона и Египта. Но в обоих случаях перенесение различных составляющих восточной математики на новые основания приводит к рождению самостоятельного пространства доказательства. То, что осуществляет Фалес для милетцев по отношению к восточной математике, Гиппас совершает по отношению к религиозным верованиям пифагорейцев-«акузматиков». И в том, и в другом случае происходит вымывание религиозного содержания из математического знания, его десакрализация. Пропорция, выступив связующим звеном при переходе от древневосточной к древнегреческой математике, впоследствии отходит на второй план. Характерно в этой связи замечание Прокла: «Поэтому, кстати, не следует вслед за Эратосфеном считать скрепой математических наук пропорцию. В самом деле, пропорция и считается и есть всего только нечто одно из того, что обще математическим наукам. И помимо нее множество другого, по своему, так сказать, существу принадлежащего общей природе математических наук, проходит через все эти науки».¹¹

Исходя из вышеизложенного, можно высказать более общее положение. Каждая древняя цивилизация с длительным опытом астрономического наблюдения и слитностью этого опыта с мифологическим сознанием в

¹¹Прокл. Комментарий к первой книге «Начал» Евклида. Введение. М., 1994. С. 121.

результате собственного внутреннего развития с необходимостью должна прийти к доказательству в виде подобия, аналогии какой-либо циклической модели. В основе модели так или иначе будет лежать круговращение небес. Это должно быть правомерно в отношении древних цивилизаций Вавилона, Египта, Китая, Индии, древних цивилизаций Америки. Круговой, циклический канон, подчиняющий себе существующий в такой цивилизации способ мышления, рано или поздно начинает выступать заменой математического доказательства.

С одной стороны, что-то наподобие божественной пропорции, которую описал Платон в диалоге «Тимей», необходимо искать в сохранившихся мифологических текстах древних цивилизаций. Нахождение описания такого отношения будет подтверждением правильности выдвинутой гипотезы, доказательством того, что не только путем обобщения эмпирического опыта получались математические формулы и теоремы, но и путем проекции канонической модели циклического движения небес на земную практику, на эмпирическую математику.

В разных цивилизациях циклическая модель-канон может принимать различные формы. Например, в Китае таковой является круговая схема из «Книги перемен». Основополагающее ее значение для математики Китая показано в работах В. С. Спирина.¹² Миф говорит о том, что узор на панцире черепахи выступил прототипом для такой модели. Однако мы имеем свидетельство того, как узор на черепахе соотносится архаическим человеком с небесными явлениями.¹³ В то же время пример дальнейшего развития китайского общества показывает, что оно, выйдя из стадии архаической и мифологической, продолжает использовать описанный тип отношения модели и конкретных задач и не приходит самостоятельно к открытию математического доказательства греческого типа. Дело не в мифологической стадии, а в особенностях круговой, циклической логики, которую использует данное общество.

С другой стороны, необходимо исследовать характер алгоритмов, которые используют древние математики. Именно исследование способов решения задач и обнаружение тождества (или нетождества) с канонической моделью должно привести нас к познанию особенностей древней математики и к подтверждению или опровержению выдвинутой гипотезы о существовании специфической формы математического доказательства в древних цивилизациях.

Это будет прохождение в обратном направлении того пути, который прошла математика в своем историческом развитии.

¹²Спирин В. С. Локализация «прибавления» и «вычитания» в «И Цзине» // Общество и государство в Китае, 12-я научная конференция, ч. 1. М., 1981. С. 93–100; см. также другие статьи этого автора и его книгу «Построение древнекитайских текстов». М., 1976.

¹³Левин-Стросс. Первобытное мышление. М., 1994.